Université de Paris I
MASTER RECHERCHE MACRO : Economie intergénérationnelle
B. Wigniolle
Janvier 2006

Inégalités et imperfection des marchés financiers (13 points)

I L'économie avec marchés parfaits

Soit une économie à générations imbriquées, dans laquelle N agents (N constant) naissent à chaque période. Ces agents vivent deux périodes, et sont des entrepreneurs-consommateurs. Ils mettent au monde un enfant en seconde période de vie. Ils ne consomment qu'en seconde période de vie, et sont altruistes au sens où ils valorisent le legs qu'ils font à leur enfant. La fonction d'utilité d'un individu de génération t dépend de sa consommation c_{t+1} et de son legs b_{t+1}, et s'écrit :

$$U(c_{t+1}, b_{t+1}) = (1-a)\ln c_{t+1} + a \ln b_{t+1}$$

W_{t+1} étant la richesse de l'agent en période $t+1$, sa contrainte budgétaire s'écrit alors

$$c_{t+1} + b_{t+1} = W_{t+1}$$

1) Donnez l'expression de c_{t+1} et b_{t+1} en fonction de W_{t+1}.

En première période de vie, l'agent crée son entreprise. Il a reçu de son parent un legs b_t. Il peut prêter ou emprunter auprès des autres agents sur un marché parfait du capital, au facteur d'intérêt R_{t+1} (entre les périodes t et $t+1$). Il dispose d'une technologie de production qui lui permet, en investissant une quantité de bien k_t en t, de produire en $t+1$ une quantité de bien $f(k_t) = \rho k_t$, avec $\rho > 0$ **et** $a\rho < 1$. Le bien utilisé comme capital se déprécie totalement en une période. L'agent reçoit également en période $t+1$ un revenu exogène w (pouvant par exemple provenir d'une activité salariale implicite en $t+1$).

2) Si l'agent emploie une quantité de capital k_t, montrez que sa richesse en $t+1$ W_{t+1} vaut :

$$W_{t+1} = \rho k_t - R_{t+1}(k_t - b_t) + w$$

3) Quelle valeur de R_{t+1} assure l'équilibre du marché du capital ?

4) On admet dorénavant que les N familles peuplant l'économie à chaque date sont de deux types : les pauvres en proportion λ (tous identiques) et les riches en proportion $1-\lambda$ (tous identiques également). Les pauvres de la génération t héritent de b_t^1 alors que les riches héritent de $b_t^2 > b_t^1$.

Compte tenu des hypothèses précédentes, écrire la dynamique des variables b_t^1 et b_t^2. Vers quels valeurs convergent b_t^1 et b_t^2 ? Que dire alors des inégalités de long terme ?

II L'économie avec seuil technologique

On suppose maintenant que la technologie de production nécessite pour produire un montant minimum investi $\bar{k}$. Elle s'écrit dorénavant :

$$f(k_t) = \begin{cases} \rho k_t \text{ si } k_t \geq \bar{k} \\ 0 \text{ si } k_t < \bar{k} \end{cases}$$

Toutes les autres hypothèses de la question précédente restent valables. On admet qu'en période t, on a : $b_t^1 < \bar{k}$ et $b_t^2 > \bar{k}$. On suppose également que

$$\frac{aw}{1 - a\rho} > \bar{k}$$

1) L'équilibre qui se réalise à la période t est-il modifié par rapport à la partie précédente ? Expliquez pourquoi certains agents sont prêteurs alors que d'autres sont emprunteurs. Précisez la valeur de R_{t+1}.
2) Que pouvez-vous dire de l'équilibre de long terme ?

III L'économie avec seuil technologique et imperfection des marchés financiers

On suppose dorénavant que les marchés financiers sont imparfaits au sens suivant : si un emprunteur fait défaut (ne rembourse pas son emprunt avec les intérêt), le prêteur ne peut saisir qu'une fraction μ ($\mu < 1$) de la production totale de l'emprunteur. Par conséquent, un agent ayant un capital initial b_t subit une contrainte sur le montant qu'il peut emprunter $x_t = k_t - b_t$ telle que

$$R_{t+1} (k_t - b_t) \leq \mu f(k_t)$$

(On suppose que le revenu w ne peut pas servir de garantie au prêt).
1) Interprétez cette nouvelle contrainte. Montrez que le capital k_t employé par un entrepreneur est maintenant tel que :

$$k_t \leq \frac{b_t}{1 - \frac{\mu\rho}{R_{t+1}}}$$

2) En déduire que, selon les valeurs de b_t et de R_{t+1}, un agent sera contraint à prêter son capital initial b_t, ou pourra devenir entrepreneur.
3) Ecrivez la valeur de la richesse W_{t+1} d'un agent héritant de b_t, selon qu'il est prêteur ou entrepreneur. Montrez qu'à l'équilibre du marché du capital, on doit avoir nécessairement :

$$\rho\mu < R_{t+1} \leq \rho$$

Pour cela, montrez que les situations $\rho\mu \geq R_{t+1}$ et $R_{t+1} > \rho$ ne sont pas des équilibres. Parmi les équilibres possibles, comparez les cas $R_{t+1} = \rho$ et $R_{t+1} < \rho$, en examinant les gains respectifs d'un prêteur et d'un entrepreneur.

On souhaite dorénavant étudier l'existence d'un équilibre au cours duquel les pauvres sont toujours prêteurs, et les riches toujours entrepreneurs, avec à chaque date $R_{t+1} < \rho$ (et à long terme $\lim_{t \to +\infty} R_{t+1} = R < \rho$).
4) En supposant qu'un tel équilibre existe en t, écrire l'équilibre du marché du capital (en notant k_t le capital employé par chaque entrepreneur). Donnez les équations d'évolution de b_t^1 et b_t^2. Ecrivez les conditions sur b_t^1 et b_t^2 qui garantissent que les agents de type 1 sont prêteurs, et les agents de type 2 entrepreneurs. Quelle est la quantité k_t de capital employée par chaque entrepreneur à l'équilibre avec $R_{t+1} < \rho$?
5) Reprenez toutes les relations de la question précédente à l'état stationnaire de long terme. Calculez b^1 et b^2 en fonction de R. En utilisant l'équilibre du marché du capital, en déduire R. A quelle condition a-t-on $R < \rho$?
6) Etudiez les conditions assurant qu'à long terme les agents de type 1 sont prêteurs, et les agents de type 2 entrepreneurs. Comment l'existence de l'équilibre dépend-elle des paramètres μ et λ ?
7) Lorsque les conditions précédentes ne sont pas satisfaites, quelles sont les caractéristiques de l'équilibre qui se réalise ?

Salaire minimum et trappe de sous-développement (7 points)

Soit un modèle à générations imbriquées, dans lequel les individus vivent pendant deux périodes. Ils travaillent seulement au cours de la première période, et ont accès pour leur épargne à un marché parfait du capital, avec un facteur d'intérêt R_t entre les périodes $t-1$ et t).

Les consommations de première et deuxième période d'un agent de la génération t sont notées respectivement c_t et d_{t+1}, et la fonction d'utilité a pour expression:

$$U(c_t, d_{t+1}) = (1-a)\ln c_t + a \ln d_{t+1}$$

L'agent reçoit en première période de vie comme rémunération de son travail un salaire égal à w_t, qu'il partage entre sa consommation c_t et son épargne s_t. On suppose enfin que la population active totale N_t croît à un taux constant n.

L'économie comprend à chaque date t une entreprise représentative, en situation de concurrence parfaite, qui produit avec du capital et du travail selon la technologie:

$$F(K_t, L_t) = \frac{AK_tL_t}{K_t + L_t}$$

On fait l'hypothèse que le capital se déprécie totalement en une période.
1.a Donnez les contraintes budgétaires d'un agent de la génération t, et déterminez ses consommations et son épargne en fonction de son salaire w_t.
1.b Donnez l'expression à l'équilibre du salaire w_t et du facteur d'intérêt R_t en fonction du capital par tête $k_t = K_t/N_t$.
1.c En exprimant l'équilibre du marché du capital, donnez l'expression de la dynamique de la variable k_t. Montrez que si $aA > 4(1 + n)$, 3 états stationnaires existent, notés k_1^*, k_2^* et k_3^* avec $k_1^* < k_2^* < k_3^*$. Que pouvez-vous dire de leur stabilité ? Pourquoi peut-on parler dans ce modèle de l'existence d'une trappe de sous-développemement ?
2. On suppose que l'économie précédente comporte également la présence d'un gouvernement, qui instaure à toute les périodes un salaire minimum constant $\bar{w}$. Si ce salaire minimum est en dessous du salaire d'équilibre du marché du travail, il est évidemment sans effet. Si au contraire il est au-dessus, il entraîne du chômage, que l'on suppose également réparti entre tous les individus de l'économie. La quantité travaillée par chaque agent devient alors $l_t < 1$.
2.a Calculez l_t en fonction de k_t.
2.b Donnez l'expression de l'épargne des agents, lorsque le salaire minimum crée du chômage. En déduire l'expression de la nouvelle dynamique de k_t.
2.c A quelle condition la dynamique de k_t avec chômage conduit à une croissance à taux positif ?
2.d On choisit une valeur du salaire minimum telle que :

$$\bar{w} = \frac{4(1 + n)^2}{Aa^2}$$

Justifiez ce choix. Quelle est la valeur limite de k_t pour laquelle il existe du chômage ? A quelle condition cette valeur limite est-elle plus élevée que k_2^*. Sous cette condition, que pouvez-vous dire de la dynamique de k_t ?
2.e On suppose que l'économie initialement dispose d'un stock de capital par jeune $k_0 < k_2^*$. Que pensez-vous de la politique de salaire minimum qui vient d'être présentée ?
2.f Que pensez-vous de ce modèle ? Pensez-vous que la politique mise en oeuvre dans ce cadre pourrait être conduite dans le monde réel ?