Université de Paris I
DEA MACRO : Economie intergénérationnelle
B. Wigniolle
Janvier 2005

Altruisme et système de retraite (14 points)

I L'économie égoïste

Soit une économie à générations imbriquées, dans laquelle N agents identiques (N constant) naissent à chaque période. Chaque agent vit deux périodes, ne travaille qu'en première période de vie, et donne naissance à un descendant à sa seconde période de vie. La fonction d'utilité d'un individu de génération t ne dépend que de ses propres consommations c_t et d_{t+1}, et s'écrit :

$$U\left(c_t, d_{t+1}\right) = c_t + \beta \ln d_{t+1}$$

La production s'effectue avec une technologie Cobb-Douglas, et utilise deux facteurs de production : le travail et le capital. La fonction de production de la firme représentative s'écrit :

$$Y_t = F(K_t, L_t) = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

Le capital se déprécie totalement à chaque période. On note w_t le salaire réel à la date t, R_t le facteur d'intérêt réel.
1) Ecrivez les contraintes budgétaires d'un agent de la génération t. Calculez ses consommations et la valeur de son épargne s_t. On supposera dans cette question que l'agent n'est jamais contraint par la contrainte $c_t \geq 0$. Indiquez à quelle condition cette propriété est vraie.
2) Ecrire le programme de la firme à une période t. En déduire l'expression des prix w_t, R_t à l'équilibre. Ecrivez ces expressions en fonction des variables $k_t = K_t/N$.
3) En écrivant les conditions d'équilibre de l'économie, donnez l'expression de la dynamique du capital par tête $k_t = \frac{K_t}{N}$. Montrez que l'état stationnaire est atteint en une période, dès lors que l'on n'est pas contraint par la contrainte $c_t \geq 0$. A quelle condition est-ce vrai ?

Pour simplifier, on considérera dorénavant que la contrainte $c_t \geq 0$ est toujours satisfaite.
4) Définissez dans cette économie l'état stationnaire optimal et comparez-le avec l'équilibre concurrentiel.
5) On introduit dans l'économie précédente un système de retraites par répartition. En première période de vie, le salaire d'un agent est taxé à un taux τ constant. En seconde période, il reçoit une retraite d'un

montant p_{t+1}. On suppose que le budget de la caisse de retraite est équilibré à toutes les périodes. Calculez la valeur de p_t en fonction de τ et w_t. Ecrivez les nouvelles contraintes budgétaires. Caractérisez le nouvel équilibre intertemporel. Est-il possible de choisir une valeur de τ permettant de décentraliser l'état stationnaire optimal ? A quelle condition cette valeur est-elle positive ?

II L'économie altruiste

On suppose que les enfants peuvent être altruistes envers leur parent. Plus précisément, on suppose qu'un parent a une probabilité p de mettre au monde un enfant altruiste, et $(1-p)$ d'avoir un enfant égoïste. Cette probabilité est indépendante du type du parent, qui lui-même peut être égoïste ou altruiste : l'altruisme et l'égoïsme ne sont pas héréditaires. Un agent de la génération t ne découvre le type de son enfant (altruiste ou égoïste) qu'à la période $t+1$, en constatant le don que cet enfant lui fait. A la date t, le don reçu en $t+1$ est donc une variable aléatoire notée $\tilde{g}_{t+1}$ qui peut prendre 2 valeurs : avec probabilité p, g^1_{t+1} (don d'un enfant altruiste), avec probabilité $1-p$, g^2_{t+1} (don d'un enfant égoïste). Par conséquent, la consommation de seconde période $\tilde{d}_{t+1}$ est elle même aléatoire et vaut avec probabilité p, d^1_{t+1}, et avec probabilité $1-p$, d^2_{t+1}.

Un agent de la génération t prend donc en considération son espérance d'utilité. Il peut lui-même être égoïste ou altruiste. Son utilité s'écrit finalement :

$$pU\left(c_t, d^1_{t+1}\right) + (1-p)U\left(c_t, d^2_{t+1}\right) + \gamma U\left(c_{t-1}, d_t\right) \text{ pour un altruiste}$$
$$pU\left(c_t, d^1_{t+1}\right) + (1-p)U\left(c_t, d^2_{t+1}\right) \text{ pour un égoïste}$$

γ est le coefficient d'altruisme tel que $0 < \gamma < 1$. $U(c,d)$ est la même fonction que dans la partie précédente. On suppose par ailleurs que N est suffisamment grand pour que la loi des grands nombres s'applique : il existe donc à chaque période pN agents altruistes et $(1-p)N$ égoïstes.

II.A L'équilibre avec épargne non-stratégique

Dans cette partie, on suppose que les parents déterminent leur comportement d'épargne en prenant comme une donnée le don qu'ils vont recevoir de leur enfant. On examine donc un équilibre de Nash entre parents et enfants. *Tous les dons doivent être positifs ou nuls.*

1) Ecrire les contraintes budgétaires d'un agent de la génération t, selon qu'il est égoïste ou altruiste. Déterminez les conditions du premier ordre du programme de l'agent. En déduire une équation qui détermine s_t en fonction de g^1_{t+1} et g^2_{t+1}. Calculez la valeur du don g_t que l'agent fait à son parent, selon qu'il est altruiste ou égoïste. On note g^1_t et g^2_t les résultats. Dans le cas où l'agent est altruiste, montrez que l'expression du don g^1_t dépend du montant d'épargne s_{t-1} réalisé par le parent de la

génération $t-1$. A quelle condition un enfant altruiste fait-il un don nul à son parent ?

2) En utilisant les relations précédentes, caractérisez l'équilibre de l'économie. Montrez que deux cas doivent être distingués, selon que $\alpha\beta^{\alpha} < \gamma\beta$ ou $\alpha\beta^{\alpha} > \gamma\beta$. Dans le premier cas, on précise qu'il n'est pas possible de calculer explicitement la valeur d'équilibre de k, mais que l'on trouve une équation qui le détermine de manière implicite.

II.B L'équilibre avec épargne stratégique

Dans cette partie, on suppose que les parents déterminent leur comportement d'épargne en prenant en considération l'impact de leur épargne sur le don qu'ils recevront de leur enfant. On examine donc un équilibre de Stackelberg entre parents et enfants. *Tous les dons doivent être positifs ou nuls.*

1) Donnez les expressions des dons g_{t+1}^{1} et g_{t+1}^{2} qu'un agent de la génération t s'attend à recevoir de son enfant, en fonction de son épargne s_t. Montrez que deux cas doivent être distingués. En déduire le choix optimal d'épargne s_t de l'agent dans ces deux cas.

2) En utilisant les relations précédentes, caractérisez l'équilibre de l'économie. Montrez que trois cas doivent être distingués, selon que $\alpha\beta^{\alpha} < \gamma\beta$, $\alpha\left[\beta(1-p)\right]^{\alpha} > \gamma\beta$ ou $\alpha\left[\beta(1-p)\right]^{\alpha} < \gamma\beta < \alpha\beta^{\alpha}$. Dans ce dernier cas, que pouvez-vous dire de l'existence et de l'unicité de l'équilibre intertemporel ?

3) On se place dans le cas $\alpha\beta^{\alpha} < \gamma\beta$. On introduit dans l'économie précédente un système de retraite par répartition, qui possède les mêmes caractéristiques que celui de la question I.5. Montrez que, pour une conditon sur les paramètres du modèle à préciser, il est possible de choisir une valeur de $\tau > 0$ qui conduit à un accroissement de l'épargne et du capital dans l'économie. Commentez ce résultat.

Taxation du capital et croissance (6 points)

Soit un modèle à générations imbriquées, dans lequel les individus vivent pendant deux périodes. Ils travaillent seulement au cours de la première période, et ont accès pour leur épargne à un marché parfait du capital, avec un facteur d'intérêt R_t entre les périodes $t-1$ et t).

Les consommations de première et deuxième période d'un agent de la génération t sont notées respectivement c_t et d_{t+1}, et la fonction d'utilité a pour expression:

$$U(c_t, d_{t+1}) = (1-a)\ln c_t + a \ln d_{t+1}$$

L'agent reçoit en première période de vie comme rémunération de son travail un salaire égal à w_t, qu'il partage entre sa consommation c_t et son épargne s_t.
On suppose enfin que la population active totale N_t croît à un taux constant n.

L'économie comprend à chaque date t une entreprise représentative, en situation de concurrence parfaite, qui produit avec du capital et du travail selon la technologie:

$$F(K_t, L_t) = A\left(\sqrt{K_t} + \sqrt{L_t}\right)^2$$

Enfin, on fait l'hypothèse que le capital se déprécie totalement en une période.

1.a Donnez les contraintes budgétaires d'un agent de la génération t, et déterminez ses consommations et son épargne en fonction de son salaire w_t.

1.b Donnez l'expression à l'équilibre du salaire w_t et du facteur d'intérêt R_t en fonction du capital par tête $k_t = K_t/N_t$.

1.c En exprimant l'équilibre du marché du capital, donnez l'expression de la dynamique de la variable k_t. A l'aide d'une représentation graphique, déduisez-en l'existence d'un état stationnaire et calculez son expression. Décrivez alors les caractéristiques de l'économie à long terme.

2 On suppose que l'économie précédente comporte également la présence d'un gouvernement, qui choisit de taxer les revenus du capital (et donc de l'épargne) pour subventionner le travail. Les gains liés au capital sont taxés au taux τ alors que chaque travailleur jeune en t reçoit un revenu additionnel σ_t. L'équilibre budgétaire est supposé vérifié à chaque période, c'est-à-dire que l'on a l'égalité suivante:

$$\tau R_t K_t = \sigma_t N_t$$

Cette politique du gouvernement n'affecte que les consommateurs, rien n'étant changé pour l'entreprise en ce qui concerne l'expression de ses coûts de production.

2.a Ecrire les nouvelles contraintes budgétaires des consommateurs, et l'expression de leur épargne.

2.b Donnez l'expression de la dynamique de la variable k_t. Que constatez-vous en ce qui concerne les propriétés de croissance de long terme de l'économie, si la constante A est suffisamment élevée ?

2.c Interprétez le résultat trouvé, et montrez l'importance de la structure particulière du modèle à générations imbriquées.

2.d La taxation des revenus du capital a t-elle un effet distorsif dans le comportement des consommateurs ? Une telle politique économique peut-elle permettre une amélioration du bien-être de toutes les générations ?