Université de Paris I
DEA MACRO : Economie intergénérationnelle
B. Wigniolle
Janvier 2004

Exercice I : Accumulation et mobilité des facteurs productifs (12 points)

Soit une économie à générations imbriquées, dans laquelle les individus vivent pendant deux périodes et travaillent seulement au cours de la première période. On suppose que la population active totale N_t (nombre de jeunes de la génération t) croît à un taux constant n. Les consommations de première et deuxième période d'un agent de la génération t sont notées respectivement c_t et d_{t+1}, et la fonction d'utilité a pour expression:

$$U(c_t, d_{t+1}) = (1-a)\ln c_t + a \ln d_{t+1}$$

L'agent reçoit en première période de vie comme rémunération de son travail un salaire réel égal à w_t. On note s_t l'épargne réelle de l'agent durant la période t. Le facteur d'intérêt réel entre t et $t+1$ est noté R_{t+1}.

L'économie comprend à chaque date t une entreprise représentative, en situation de concurrence parfaite, qui produit avec du capital et du travail selon la technologie:

$$F(K_t, L_t) = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

On fait l'hypothèse que le capital se déprécie totalement en une période.

1) L'économie fermée.

1.1) Ecrivez les contraintes budgétaires d'un agent de la génération t, ainsi que son programme. Donnez alors l'expression des consommations à chaque période et la valeur de l'utilité indirecte.

1.2) En étudiant le programme de la firme, donnez les expressions des rémunérations d'équilibre des facteurs w_t et R_t en fonction de $k_t = K_t/N_t$. Donnez alors l'expression de l'utilité indirecte en fonction de k_t et de k_{t+1}. On considère une économie à l'état stationnaire associée à une valeur $k_t = k$. A quelle condition sur les paramètres a et α l'utilité indirecte correspondant à l'état stationnaire est-elle une fonction croissante de k ? Commentez ce résultat.

1.3) En exprimant l'équilibre du marché du capital, donnez l'expression de la dynamique du capital par tête $k_t = \frac{K_t}{N}$. Précisez alors l'expression du point stationnaire stable de cette dynamique.

1.4) Rappelez les propriétés d'efficacité ou d'inefficacité de l'état stationnaire, par comparaison avec la règle d'or. A quelles conditions sur les paramètres correspondent ces propriétés ?

2. Economies avec mobilité du capital

On suppose maintenant que l'économie mondiale comprend deux pays ayant les mêmes caractéristiques que celles présentées à la question 1. On note dorénavant N_t la population mondiale, en supposant qu'une part p habite dans le pays 1 et une part $1-p$ dans le pays 2. Dans cette question, la population est supposée *immobile*. La seule différence entre les deux économies concerne le paramètre a, égal à a^1 dans l'économie 1 et à a^2 dans l'économie 2. L'économie 1 est peuplée de fourmies alors que l'économie 2 est peuplée de cigales : on a donc $a^1 > a^2$. On note dorénavant $\left(c_t^i, d_{t+1}^i, k_t^i, w_t^i, R_t^i\right)$ les variables correspondant à l'économie i, avec $i = 1, 2$. k_t^i est le stock de capital du pays i en t rapporté à la population active de ce pays.

2.1) On suppose que le capital est parfaitement mobile entre les deux économies. Quelle relation doit-il exister entre R_t^1 et R_t^2 ? Que peut-on en déduire sur les variables k_t^1 et k_t^2 ? Si on note K_t la valeur du stock de capital mondial, et $k_t = K_t/N_t$, que vaut cette dernière variable par rapport à k_t^1 et k_t^2 ?

2.2) Ecrire l'équilibre du marché du capital mondial. En déduire la dynamique de k_t.

2.3) Comparez la dynamique de k_t du modèle de Diamond avec celle obtenue ici. Donnez l'expression de l'état stationnaire atteint à long terme k. Comparez cette valeur avec les valeurs k^1 et k^2 que chaque économie aurait atteint en autarcie.

2.4) On considère successivement les 3 cas suivants concernant les situations stationnaires d'autarcie :

1. k^1 et k^2 sont en sous-accumulation.
2. k^1 et k^2 sont en sur-accumulation.
3. k^1 est en sur-accumulation et k^2 est en sous-accumulation.

En utilisant le résultat trouvé à la question 1.2, indiquez dans chaque cas les conséquences de l'ouverture du marché des capitaux sur l'utilité de long terme des agents dans chaque pays.

3) Economies avec mobilité du travail

On suppose maintenant que le capital est immobile entre les deux économies, mais que les agents sont mobiles. Ils ont le choix à leur naissance entre rester dans leur pays de naissance, et migrer dans l'autre pays, mais on suppose que dans tous les cas ils doivent passer leurs *deux périodes de vie dans le même pays*. La population mondiale est toujours N_t, une part p étant des fourmies ($a = a^1$) et une part $1-p$ des cigales ($a = a^2$). On suppose qu'en $t = 0$, on ouvre les frontières aux migrations

de population, et qu'à cette date, les deux économies partent de *l'état stationnaire autarcique.*
3.1) En $t = 0$, on dit qu'un agent est incité à migrer dans l'autre pays si l'utilité qu'il obtiendrait avec les prix de l'autre économie est supérieure à l'utilité dans son économie. On considère successivement les 3 cas suivants concernant les situations d'autarcie :

1. k^1 et k^2 sont en sous-accumulation. Montrez, toujours en utilisant le résultat de la question 1.2, que seules les cigales sont incitées à migrer.

2. k^1 et k^2 sont en sur-accumulation. Montrez que seules les fourmies sont incitées à migrer.

3. k^1 est en sur-accumulation et k^2 est en sous-accumulation. Montrez que les cigales et les fourmies sont incitées à migrer.

3.2) Expliquez de manière intuitive pourquoi, dans le premier cas, le seul état de long terme possible est obtenu quand toutes les cigales habitent le pays des fourmies ; dans le second cas, le seul état de long terme possible est obtenu quand toutes les fourmies habitent le pays des cigales ; dans le troisième cas, il existe une répartition homogène des deux populations dans les deux pays.
3.3) Donnez alors les caractéristiques de l'économie mondiale à long terme. Que pouvez-vous dire des gains ou des pertes de bien-être entrainées par l'ouvertiure des frontières pour les deux populations initiales, en distinguant toujours les trois cas précédents.

Exercice II :Altruisme et égoïsme(8 points)

1. L'économie égoïste

Soit une économie à générations imbriquées, dans laquelle N agents (N constant) naissent à chaque période. Chaque agent vit deux périodes, ne travaille qu'en première période de vie, et donne naissance à un descendant à sa seconde période de vie. Tous les individus sont égoïstes. La fonction d'utilité d'un individu de génération t ne dépend que de ses propres consommations c_t et d_{t+1}, et s'écrit :

$$U(c_t, d_{t+1}) = (1 - a)\ln c_t + a \ln d_{t+1}$$

La production s'effectue avec une technologie Cobb-Douglas utilisant travail et capital :

$$Y_t = F(K_t, L_t) = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

Le capital se déprécie totalement à chaque période. On note w_t le salaire réel à la date t, s_t l'épargne de la génération t, et R_{t+1} le facteur d'intérêt réel qui rémunère cette épargne en $t+1$.

Ecrivez les contraintes budgétaires d'un agent de la génération t. Calculez ses consommations et la valeur de son épargne s_t. Rappelez l'expression des valeurs de w_t et R_t à l'équilibre en fonction de $k_t = K_t/N$. En exprimant l'équilibre du marché du capital, donnez l'expression de la dynamique de k_t. Donnez l'expression du point stationnaire non nul de cette dynamique. Rappelez les propriétés d'efficacité ou d'inefficacité de l'état stationnaire, par comparaison avec la règle d'or.

2. L'économie mixte

On suppose qu'à la suite d'une mutation génétique, il naît un individu altruiste à une date $t = 0$. Cet individu donnera naissance en deuxième période de vie à un enfant altruiste, qui lui même aura un enfant altruiste etc... : toute la dynastie est altruiste. Au contraire, les $(N-1)$ autres familles restent égoistes. L'utilité de l'agent altruiste de génération t s'écrit :

$$V_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \beta^i U(c_{t+i}, d_{t+1+i})$$

U reste la même fonction que dans la partie précédente. L'altruisme de la famille se traduit par le fait que l'agent reçoit éventuellement un legs b_t de son parent, et laisse éventuellement un legs b_{t+1} à son enfant. Il est impossible de faire un legs négatif.

1) Donnez les contraintes budgétaires, puis les conditions du premier ordre du programme d'un agent altruiste.

2) Montrez que deux types d'états de long terme sont possibles, l'un correspondant à la règle d'or modifiée.

3) Dans le cas de l'état stationnaire de la règle d'or modifiée, explicitez la richesse, les consommations et l'épargne de chaque type d'agents ainsi que le legs d'un agent altruiste. A quelle condition ce legs est-il positif ? Interprétez le résultat. Donnez alors les conditions assurant l'existence de chaque état de long terme.

4) On suppose que l'on est initialement à l'état stationnaire. Que se passe-t-il après la mutation génétique ? (Il est possible de répondre sans calcul à cette question)

5) A votre avis, la mutation génétique a-t-elle été profitable aux agents égoïstes lorsque l'on considère le long terme ?