**Université de Paris I**
**M2 MACRO, ECO INDUS, ENVIRONNEMENT**
**Innovation et croissance**
B. Wigniolle
Mai 2006

Le but de ce problème est d'étudier le modèle d'échelle de qualité de Grossman et Helpman (1991) en ajoutant une hypothèse supplémentaire: une innovation introduit une amélioration de la qualité existante par un facteur *aléatoire.*

L'économie comprend un continuum de biens représenté par le segment $[0,1]$. Chaque bien $j$ existe à la date $s$ sous différents niveaux de qualité notés $q_m(j,s)$. $m$ est un entier qui varie de 1 à $N(j,s)$, où $N(j,s)$ est le nombre d'innovations qu'a connu le secteur $j$ jusqu'à la date $s$ (la qualité du bien croît avec le paramètre $m$). Dans l'économie vit un consommateur représentatif dont l'utilité intertemporelle prend la forme :

$$U_t = \int_t^{+\infty} \exp\left(-\rho(s-t)\right) \ln D(s) ds$$

avec $D(s)$ un indice agrégé de consommation défini par :

$$\ln D(s) = \int_0^1 \ln\left(\sum_{m=1}^{N(j,s)} q_m(j,s)\, x_m(j,s)\right) dj$$

$x_m(j,s)$ désigne la quantité consommée du bien $j$ de degré de qualité $m$ à la date $s$. On note $E(s)$ la dépense nominale de l'agent à la date $s$, $A(s)$ la valeur nominale de l'actif qu'il détient et $r(s)$ la valeur du taux d'intérêt nominal. Le prix des différents biens $j$ de degré de qualité $m$ à la date $s$ est noté : $p_m(j,s)$. Enfin, l'agent offre de manière inélastique une quantité de travail constante $L$, qui est rémunérée par un salaire nominal $w(s)$. Sa contrainte budgétaire instantanée est donc :

$$\dot{A}(s) = rA(s) + w(s)L - E(s)$$

et la condition à l'infini s'écrit :

$$\lim_{s\to+\infty} \exp\left(-\int_t^s r(u)du\right) A(s) = 0$$

On note finalement $E(j,s)$ la dépense nominale de la période $s$ sur le secteur $j$.

**1. Etude du consommateur**
**1.1** Décomposez le programme du consommateur en trois étapes. La première consiste à allouer de manière optimale la dépense $E(j,s)$ sur les différents niveaux de qualité. La seconde revient à répartir la dépense totale $E(s)$ sur les différents secteurs $j$.
**1.2** Ecrivez alors le programme d'allocation intertemporelle optimale de la dépense $E(s)$ (troisième étape). Montrez que les conditions d'optimalité de ce programme s'écrivent:

$$\frac{\dot{E}(s)}{E(s)} = r - \rho$$
$$\lim_{s \to +\infty} \exp(-\rho s) \frac{A(s)}{E(s)} = 0$$

*Afin de faciliter les calculs futurs, on utilisera toujours par la suite la normalisation suivante :* $E(s) = 1, \forall s$.

**2. Etude du comportement des producteurs**

On suppose que dans un secteur $j$ (à une date $s$) un producteur dispose d'un niveau de qualité $\lambda$ fois supérieur au niveau de qualité du concurrent disposant (après lui) de la meilleure qualité. Les différentes firmes se font une concurrence à la Bertrand. Leur fonction de production leur permet de produire une unité de bien avec une unité de travail. Montrez alors que la firme offrant la meilleure qualité peut disposer d'un monopole. Indiquez le prix optimal qu'elle doit fixer, et donnez l'expression de son profit $\pi$ en fonction de $\lambda$.

**3. Etude du comportement d'innovation**

Dans chaque secteur, les firmes peuvent entreprendre une activité d'innovation. Si $h(s)$ est l'intensité de l'activité d'innovation entreprise dans un secteur à la date $s$, l'arrivée d'une innovation suit un processus exponentiel de paramètre $h(s)$. On rappelle que cela veut dire que durant un intervalle de temps infinitésimal $ds$, la probabilité d'arrivée d'une innovation est $h(s)ds$. Le coût instantané en travail associé à un effort $h(s)$ vaut $ah(s)$, avec $a > 0$.

Lorsqu'une innovation arrive, elle est caractérisée par le facteur $\lambda$ par lequel elle multiplie le meilleur niveau de qualité existant dans le secteur. Ce facteur $\lambda$ est donné par une variable aléatoire (indépendante de la précédente) qui peut prendre la valeur $\lambda_1$ avec probabilité $\gamma$ et la valeur $\lambda_2$ avec probabilité $1-\gamma$. On suppose que $1 < \lambda_2 < \lambda_1$.
**3.1** Soit une firme leader dans son secteur, qui dispose d'un niveau de qualité $\lambda$ fois supérieur à son concurrent direct (avec $\lambda = \lambda_1$ ou $\lambda = \lambda_2$). Soit $H(s)$ l'effort total de recherche réalisé par les followers dans ce secteur. Ecrire l'équation de Bellman que doit vérifier sa valeur $v$, en

prenant en compte le fait que la valeur d'un follower est nulle puisqu'il y a libre entrée dans la R&D.

*On se place dorénavant à l'état stationnaire de l'économie, pour lequel toutes les variables sont constantes.* Calculez la valeur de la firme en fonction de $\lambda$ (On la note $v(\lambda)$ pour insister sur la dépendance vis-à-vis de cette variable).

**3.2** On suppose que seules les firmes followers font de la R&D. Lorsqu'une firme se lance dans l'activité de R&D, elle ignore la taille $\lambda$ de l'innovation qu'elle va éventuellement recevoir. Elle l'apprend au moment où elle innove. Elle choisit donc son effort de R&D en fonction de la valeur *espérée* d'une innovation. Quelle est la valeur espérée d'une innovation $E\left[v(\lambda)\right]$ ? En comparant le coût de l'effort en R&D et le gain espéré, en déduire que l'équilibre avec R&D doit vérifier la relation suivante :

$$aw = \frac{1-X}{\rho + H}$$

où $X$ est une expression à préciser qui dépend de $\gamma$, $\lambda_1$ et $\lambda_2$. Comment $X$ dépend-elle de ces 3 variables ?

**4. Etude de l'équilibre stationnaire de l'économie**

**4.1** En utilisant la loi des grands nombres, calculez l'emploi total utilisé dans la production. Donnez l'expression de la relation traduisant l'équilibre du marché du travail. En éliminant $w$, montrez que $H$ peut s'écrire finalement :

$$H_1 = \frac{L}{a}(1-X) - \rho X$$

Comment $H_1$ varie en fonction de $\gamma$, $\lambda_1$ et $\lambda_2$ ? Interprétez le résultat.

**4.2** On souhaite calculer le taux de croissance de l'indice de consommation $D$, $H_1$ étant l'effort de recherche. Calculez la proportion des secteurs connaissant une innovation de taille $\lambda_1$ (respectivement $\lambda_2$) durant un intervalle de temps infinitésimal $ds$. En déduire la valeur de $\dot{D}/D$. Comment varie cette valeur en fonction de $\gamma$, $\lambda_1$ et $\lambda_2$ ? Interprétez le résultat.

**5. L'économie avec un office de brevets exigeant**

**5.1** On suppose maintenant que l'office des brevets n'accorde un brevet qu'aux "bonnes" innovation augmentant la qualité d'un facteur $\lambda_1$. Les autres sont jugées insuffisantes et ne sont pas protégées. Comme elles sont copiables immédiatement, *on fait l'hypothèse qu'elles ne sont pas produites, et que le précédent innovateur reste en monopole sur le marché. Comme l'information n'est pas révélée, les innovateurs futurs innovent à partir du niveau de la dernière innovation de type $\lambda_1$.*

Reprenez le modèle en indiquant comment les résultats des questions 3.1, 3.2 et 4.1 changent. En déduire la valeur de l'effort total de R&D

notée $H_2$. Comparez $H_2$ à $H_1$. Montrez qu'il est possible d'avoir $H_2 > H_1$ ou $H_2 < H_1$ selon la valeur de $\lambda_1$. Expliquez pourquoi. Calculez le taux de croissance $\dot{D}/D$ et montrez qu'il peut être plus petit ou plus grand que celui de la question 4.2, selon la valeur de $\lambda_1$. Interprétez le résultat. (On demande seulement de montrer que les deux cas sont possibles, sans donner l'expression précise des seuils).

**5.2** On suppose toujours que seules les innovations de taille $\lambda_1$ sont brevetées. Mais, on fait maintenant l'hypothèse que, si une innovation de taille $\lambda_2$ apparaît, *le bien de qualité correspondante est produit de manière concurrentielle. Comme l'information est révélée, les innovateurs futurs innovent à partir du niveau de qualité atteint par la dernière innovation, quelle soit de taille* $\lambda_1$ ou $\lambda_2$.

Reprenez les questions 3.1, 3.2 et 4.1. En déduire la valeur de l'effort total de R&D notée $H_3$ et écrivez-la sous la forme :

$$H_3 = \frac{L}{a}(1 - Y) - \rho Y$$

Comparez $H_3$ à $H_2$ et $H_1$. Calculez le taux de croissance $\dot{D}/D$ et comparez sa valeur à celles trouvées aux questions 4.2 et 5.1. Expliquez les résultats.

**6. L'optimum social**

**6.1** Déterminez les caractéristiques de l'optimum social de cette économie. Calculez en particulier $H^*$, le montant optimal de l'effort total en R&D.

**6.2** On admet que les paramètres du modèle sont tels que $H_1 = H^*$. Peut-on alors affirmer que l'équilibre concurrentiel de la question 4 présente toutes les caractéristiques de l'optimum social ?

**6.3** On suppose maintenant $H_1 \neq H^*$. Est-il possible de rapprocher l'économie concurrentielle de l'optimum social, si l'office de brevets est plus sélectif dans l'attribution des brevets (s'il se comporte comme dans la question 5) ? Afin de répondre à cette question, il est possible de se contenter de développer de manière intuitive les différents arguments.