Université de Paris I
DEA MACRO : Innovation et croissance
B. Wigniolle
Mai 2005

Cycle du produit et propriété intellectuelle.

Soit une économie mondiale dans laquelle il existe à une date s un continuum de biens $[0, n(s)]$. $n(s)$ correspond au dernier bien apparu dans l'économie à la date s. Cette économie comporte deux pays, un pays du nord et un pays du sud. Elle comporte un consommateur représentatif mondial dont l'utilité intertemporelle est donnée par :

$$U_t = \int_t^{+\infty} \exp\left(-\rho(s-t)\right) \ln D(s) ds$$

avec $D(s)$ un indice agrégé de consommation défini par :

$$D(s) = \left(\int_0^{n(s)} (x(j,s))^{\alpha} dj \right)^{1/\alpha}$$

$x(j,s)$ désigne la quantité consommée du bien j à la date s. α est un coefficient tel que $0 < \alpha < 1$. On note $E(s)$ la dépense nominale de l'agent à la date s, $A(s)$ la valeur nominale de l'actif qu'il détient et $r(s)$ la valeur du taux d'intérêt nominal mondial, en supposant qu'il y a parfaite mobilité des capitaux. Il y a également liberté des échanges entre les deux pays, et le prix des différents biens j à la date s est noté : $p(j,s)$. Enfin, l'agent offre de manière inélastique une quantité de travail L^N dans l'économie du nord, et une quantité L^S dans l'économie du sud. Les salaires nominaux sont respectivement $w^N(s)$ et $w^S(s)$, avec $w^N(s) > w^S(s)$.

1. Etude du consommateur

1.1 Commentez la forme de $D(s)$. Comment pouvez-vous interprétez le rôle de α ?

1.2 Ecrivez le programme du consommateur. Décomposez le programme en deux étapes, la première étant statique et la seconde dynamique. La première consiste à allouer de manière optimale la dépense donnée $E(s)$ sur les différents biens. Ecrivez le programme correspondant, donnez les conditions du premier ordre, et montrez que les fonctions de demande ont pour expression :

$$x(j) = \frac{(p(j))^{\frac{1}{\alpha-1}} E}{\int_0^n (p(i))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} di}$$

(on a omis pour simplifier la variable s représentant le temps).

1.3 Ecrivez alors le programme d'allocation intertemporelle optimale de la dépense $E(s)$. Montrez que les conditions d'optimalité de ce programme s'écrivent:

$$\frac{\dot{E}(s)}{E(s)} = r - \rho$$
$$\lim_{s\to+\infty} \exp(-\rho s)\frac{A(s)}{E(s)} = 0$$

On se placera dorénavant dans *une situation stationnaire*, et on adoptera la normalisation $E(s) = 1$.

2. Etude du comportement des producteurs

On suppose que le nord innove en introduisant de nouveaux biens protégés par un brevet. Le sud imite les biens apparus au nord *dans leur ordre d'apparition* : les biens les plus anciens sont supposés les plus faciles à imiter. A une date s, il existe donc deux types de biens : les biens anciens produits par le sud représentés par le segment $\left[0, n^S(s)\right]$ et les biens nouveaux produits par le nord représentés par le segment $\left[n^S(s), n(s)\right]$. On se place dans une situation stationnaire, pour laquelle la durée de vie d'un bien au nord est supposée constante et égale à T. Quand ce bien est imité par un producteur du sud, celui-ci obtient alors un monopole de durée de vie infinie. A l'état stationnaire, on suppose que le sud produit une part β de l'ensemble des biens existants, alors qu'une part $(1-\beta)$ est produite par le nord. On fait enfin l'hypothèse que $n(s)$ croît à un taux constant g.

2.1 Montrez que les hypothèses précédentes conduisent à la relation :

$$\beta \exp(gT) = 1$$

2.2 On considère le programme d'un producteur du nord en monopole (en concurrence monopolistique). On suppose que tous les biens (au nord comme au sud) sont produits avec une technologie de production linéaire, qui permet de produire une unité de bien avec une unité de travail. Montrez que ce producteur choisit un prix optimal noté p^N (identique pour tous les producteurs du nord) égal à :

$$p^N = \frac{w^N}{\alpha}$$

2.3 On considère le programme d'un producteur du sud en monopole. Montrez que deux cas doivent être distingués, selon que $\frac{w^S}{\alpha} > w^N$ ou $\frac{w^S}{\alpha} < w^N$. Interprétez ces deux cas, et donnez pour chacun le prix que fixera le producteur du sud.

On étudiera dans la suite le cas

$$\frac{w^S}{\alpha} < w^N$$

2.4 On suppose que, à l'état stationnaire, les salaires nominaux $w^N(s)$ et $w^S(s)$ sont constants et on pose : $x = w^N/w^S$. En regroupant les résultats précédents, montrez que chaque producteur du nord (respectivement du sud) produit à la date s une quantité $x^N(s)$ (respectivement $x^S(s)$) vérifiant:

$$x^N(s) = \frac{\alpha}{w^N} \frac{x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{n(s)\left[\beta + (1-\beta)\, x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]}$$
$$x^S(s) = \frac{\alpha}{w^S} \frac{1}{n(s)\left[\beta + (1-\beta)\, x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]}$$

Donnez les expressions des profits correspondants.
2.5 Donnez finalement l'expression de la quantité de travail totale utilisée dans chaque pays dans le secteur productif de l'économie.

3. Etude des comportements d'innovation et d'imitation

L'activité de recherche dans le nord a pour but d'inventer des nouveaux biens. La technologie d'invention possède la forme suivante :

$$\dot{n} = n \frac{L_R^N}{a}$$

où L_R^N est la quantité de main d'oeuvre employée dans la recherche, alors que a est un coefficient technique positif. La concurrence est parfaite dans le secteur de recherche. L'inventeur d'un nouveau bien dépose un brevet qui lui assure un monopole jusqu'à ce qu'il soit imité par le sud, ce qui arrive à l'état stationnaire d'après les questions précédentes au bout d'une durée T.

L'activité d'imitation dans le sud permet à un producteur de récupérer la production de biens inventés au nord. La technologie d'imitation est de la forme suivante :

$$\dot{n}^S = G(n, n^S) \frac{L_I^S}{b}$$

où L_I^S est la quantité de main d'oeuvre employée dans l'imitation, alors que b est un coefficient technique positif. $G(n, n^S)$ est une fonction homogène de degré 1 qui traduit le niveau de connaissance dans le sud. On retient dorénavant la forme :

$$G(n, n^S) = n^{1-\delta} \left(n^S\right)^{\delta}$$

avec δ un paramètre tel que $0 < \delta < 1$.
3.1 Discutez les formes retenues pour les technologies d'innovation et d'imitation, en commentant la présence des termes n et $G(n, n^S)$. Comment pouvez vous interpréter les cas $\delta \to 0$ et $\delta \to 1$. Montrez qu'à l'état stationnaire on peut écrire :

$$G(n, n^S) = \beta^{\delta} n$$

3.2 Soit $v^N(s)$ la valeur d'un brevet au nord correspondant à un *bien inventé à cette date*. En utilisant l'hypothèse de concurrence parfaite dans la recherche au nord, montrez qu'il doit exister une relation à l'équilibre entre $v^N(s)$, $n(s)$ et w^N. De même, en considérant l'activité d'imitation, trouvez une relation

analogue pour le sud entre les variables $v^S(s)$, $G(n(s), n^S(s))$ et w^S. $v^S(s)$ désigne la valeur d'une firme ayant imité un bien à la date s.
3.4 Calculez les valeurs associées à une innovation et à une imitation $v^N(s)$ et $v^S(s)$. On rappelle qu'une innovation assure un monopole de durée T à l'état stationnaire, quand l'imitation assure un monopole de durée infinie. On rappelle également que $n(s)$ à l'état stationnaire croît au taux constant g et peut donc être écrit:

$$n(s) = n_0 \exp(gs)$$

Enfin, la formule suivante pourra être utile : pour k une constante positive,

$$\int_s^{s+T} \exp(-kt)dt = \frac{\exp(-ks) - \exp[-k(s+T)]}{k}$$

3.5 En regroupant les résultats des questions 3.3 et 3.4, montrez qu'on aboutit aux résultats :

$$w^N a = (1-\alpha)\frac{x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\left[\beta + (1-\beta)\, x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]}\frac{1-\exp[-(g+\rho)T]}{g+\rho}$$

$$\frac{w^S b}{\beta^\delta} = (1-\alpha)\frac{1}{\left[\beta + (1-\beta)\, x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]}\frac{1}{g+\rho}$$

4. Etude de l'équilibre de long terme de l'économie
4.1 Donnez l'expression des relations d'équilibre du marché du travail pour chaque pays. En utilisant les relations précédentes, se ramener à un système de trois équations à trois inconnues β, T et g.
4.2 Afin de simplifier les calculs, on étudie les relations d'équilibre dans le cas particulier $\rho = 0$. Calculez les valeurs de g et β. En déduire la valeur de x. Commentez les résultats. Comparez la valeur de g trouvée avec celle d'économie fermée.
4.3 Etudiez comment g et β varient en fonction des paramètres α, a, b, δ, L^N et L^S. Dans chaque cas, interprétez les résultats. Selon vous, quel changement de paramètre pourrait permettre de représenter un renforcement de la propriété intellectuelle ? Une diffusion plus importante du savoir du nord vers le sud ?
4.4 Comparez l'équilibre précédent à celui que serait obtenu dans une économie fermée avec le seul pays du nord, de population L^N. Comparez en particulier les taux de croissance et les niveaux de bien-être de l'agent représentatif.
4.5 Comparez l'équilibre précédent à celui que serait obtenu dans une économie fermée totalement intégrée de population $L^N + L^S$.
5 Question supplémentaire (pour être sûr que personne n'ait le temps de s'ennuyer). Reprenez toute l'analyse précédente dans le cas $w^S/\alpha > w^N$. A quelle condition sur les paramètres est-on dans le premier ou le second cas ?