Université de Paris I
DEA MACRO : Dynamique et croissance
B. Wigniolle
Mai 2004

Le but de ce problème est d'étudier comment décentraliser l'optimum social, dans une économie proche de celle formalisée par Grossman et Helpman (1991).

L'économie comprend un bien final unique, produit à la date s en quantité $Y(s)$. Ce bien est produit à l'aide d'un continuum de biens intermédiaires représenté par le segment $[0,1]$. La fonction de production de ce bien final s'écrit:

$$Y(s) = \exp\left[\int_0^1 \ln\left(x(j,s)\right) dj\right]$$

$$\text{soit encore : } \ln Y(s) = \int_0^1 \ln\left(x(j,s)\right) dj$$

où $x(j,s)$ désigne la quantité de bien intermédiaire j utilisée dans la production à la date s.

1 Etude du comportement des producteurs

1.1 On suppose que le bien final est produit en concurrence parfaite par une firme unique. On note $p(j,s)$ le prix du bien intermédiaire j à la date s et on normalise à 1 le prix du bien final. Ecrivez le programme du producteur de bien final, et montrez que la demande $x(j,s)$ de bien j en s vérifie :

$$p(j,s)x(j,s) = Y(s)$$

1.2 On étudie le marché du bien intermédiaire j à une date s. On suppose que différents producteurs sont en concurrence pour la fourniture de ce bien, avec des technologies de production différente. Les différentes technologies sont de la forme suivante (on omet les variables j et s pour simplifier) :

$$x = \lambda^i l$$

x est la quantité de bien produite, l est la quantité de travail employée, rémunérée par le salaire $w(s)$. λ est un paramètre tel que $\lambda > 1$, i est un entier qui varie entre 0 et $M(j,s)$. La technologie correspondant à $i = M(j,s)$ peut alors s'interpréter comme la meilleure technologie disponible dans le secteur j à la date s.

On suppose qu'un seul producteur à la date s dispose de la meilleure technologie pour produire le bien j, alors que les autres producteurs disposent de technologies associées à $i = 0, 1, ..., (M(j,s) - 1)$. Les producteurs sont en concurrence à la Bertrand sur ce marché.

Ecrivez le profit d'une firme de technologie i. Montrez que le producteur disposant de la technologie $i = M(j,s)$ peut éliminer ses concurrents en fixant un prix limite. Calculez alors pour l'entreprise en monopole la production $x(s)$, la quantité de travail employée $l(s)$, et le profit réalisé $\pi(s)$ en fonction de $Y(s)$ et $w(s)$.

1.3 Dans chaque secteur, les firmes peuvent entreprendre une activité d'innovation. Si $h(s)$ est l'intensité de l'activité d'innovation entreprise dans un secteur à la date s, l'arrivée d'une innovation suit un processus de poisson de paramètre $h(s)$. On rappelle que cela veut dire que durant un intervalle de temps infinitésimal ds, la probabilité d'arrivée d'une innovation est $h(s)ds$. Le coût instantané en travail associé à un effort $h(s)$ vaut $ah(s)$, avec $a > 0$.

Le savoir lié aux innovations passées est supposé accessible sans coût. On suppose également qu'il y a libre entrée dans l'activité de R&D. Une innovation est protégée par un brevet de durée de vie infinie. Le détenteur d'un brevet ne peut donc perdre sa rente de monopole que lorsqu'un concurrent a innové par rapport à lui. Une innovation dans un secteur j consiste en l'invention d'une nouvelle technologie permettant de produire le bien j en étant λ fois plus productif qu'avec l'ancienne technologie.

On suppose que dans chaque secteur j, l'effort total de R&D entrepris vaut $h(s)$. On note $v(s)$ la valeur d'une innovation à la date s. Expliquez pourquoi cette valeur est indépendante du secteur j, et en particulier du niveau technologique atteint (la valeur de $M(j,s)$). On note $r(s)$ le taux d'intérêt du marché financier (parfait). Montrez que v vérifie (pour une économie dans laquelle une activité de R&D existe) :

$$\begin{aligned} rv &= \dot{v} + \pi - hv \\ v &= aw \end{aligned}$$

Expliquez (de manière intuitive) pourquoi le détenteur de la dernière innovation cesse de faire de la R&D.

2 Etude du consommateur

L'économie comprend un consommateur représentatif qui ne consomme que du bien final. Son utilité est donnée par :

$$U_t = \int_t^{+\infty} \exp\left(-\rho(s-t)\right) \ln C(s) ds$$

avec $C(s)$ la quantité de bien final consommée en s. L'agent offre de manière inélastique une quantité de travail constante L, qui est rémunérée par un salaire nominal $w(s)$. Sa contrainte budgétaire instantanée (exprimée en prenant le bien final pour numéraire) est donc :

$$\dot{A}(s) = rA(s) + w(s)L - C(s)$$

et la condition à l'infini s'écrit :

$$\lim_{s\to+\infty} \exp\left(-\int_t^s r(u)du\right) A(s) = 0$$

Montrez que le comportement optimal du consomateur vérifie :

$$\frac{\dot{C}(s)}{C(s)} = r - \rho$$
$$\lim_{s\to+\infty} \exp(-\rho s)\frac{A(s)}{C(s)} = 0$$

3. Etude de l'équilibre de l'économie

3.1 Ecrire les relations traduisant l'équilibre du marché du travail, du marché du bien final, et du marché du capital. En posant $z = Y/w$, montrez que l'équilibre du marché du travail conduit à la relation :

$$ah + \frac{z}{\lambda} = L$$

3.2 En utilisant l'ensemble des relations précédentes, montrez que z vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\dot{z}}{z} = -\rho - h + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{z}{a}$$

3.3 Après une étude (rapide) de la dynamique, en déduire les caractéristiques de l'équilibre de l'économie.

3.4 En reprenant la fonction de production du bien final, montrez que le salaire vérifie la relation suivante :

$$\ln w(s) = (\ln\lambda)(\Lambda(s) - 1)$$

avec

$$\Lambda(s) = \int_0^1 M(j,s)dj$$

Calculez la valeur de $\dot{\Lambda}(s)$ en fonction de $h(s)$. En déduire la valeur du taux de croissance de la production de bien final Y dans l'économie.

4 L'optimum social

4.1 Ecrire le programme définissant l'optimum social de l'économie. Pour cela, on pourra admettre qu'une même quantité de travail $l(s)$ est employée par chaque secteur à la date s. On pourra alors écrire ce programme en utilisant les variables $Y(s)$, $l(s)$, $h(s)$ et $\Lambda(s)$.

4.2 Résoudre ce programme en déterminant en particulier l et h.

4.3 On reprend l'économie concurrentielle (des trois premières questions) en supposant que l'activité de R&D est subventionnée à un taux s. Cela veut dire que, lorsqu'une firme fait un effort de R&D h, l'Etat prend en charge une part s du coût du travail associé à cet effort. Le coût est alors pour la firme égal à : $(1-s)wah$. La subvention est financée par une taxe forfaitaire qui porte sur le revenu du consommateur. (s peut être positif ou négatif, et s'interprète dans ce dernier cas comme une taxe). Quelles sont les caractéristiques de l'équilibre avec subvention ?

4.4 Montrez qu'il existe une valeur de la subvention s permettant de faire coïncider l'équilibre concurrentiel avec l'optimum social. A quelle condition cette valeur est-elle positive ?

5 Optimum social et externalité

On considère maintenant que la variable Λ, que l'on peut interpréter comme un indicateur du niveau technologique atteint par l'économie, exerce une externalité positive sur la production du bien final. La nouvelle fonction de production s'écrit maintenant :

$$Y(s) = \lambda^{\varepsilon\Lambda(s)} \exp\left[\int_0^1 \ln\left(x(j,s)\right) dj\right]$$

$$\text{soit encore :} \qquad \ln Y(s) = \varepsilon\Lambda(s)\left(\ln\lambda\right) + \int_0^1 \ln\left(x(j,s)\right) dj$$

ε est une constant positive.

5.1 Commentez cette nouvelle hypothèse. Indiquez comment elle modifie l'équilibre.

5.2 Déterminez le nouvel optimum social.

5.3 Comment est-il possible de décentraliser cet optimum social ?