Correction interro 1

Exercice 1 :
1. Ecrire la contrainte budgétaire de l'agent.

$$C = w(1-\tau)(T-L)$$

soit

$$C + w(1-\tau)L = w(1-\tau)T$$

On reconnait une utilité quasi-linéaire. Une solution intérieure ($C > 0$) est solution du programme :

$$\max_L \ln L - w(1-\tau)L + w(1-\tau)T$$

Solution :

$$L = \frac{1}{w(1-\tau)}$$

Offre de travail :

$$l = T - \frac{1}{w(1-\tau)}$$

Utilité indirecte :

$$v\left[w(1-\tau), w(1-\tau)T\right] = -\ln w(1-\tau) - 1 + w(1-\tau)T$$

On a :

$$C = w(1-\tau)T - 1$$

L'hypothèse

$$w(1-\tau)T > 1$$

correspond donc à une situation intérieure, avec consommation et offre de travail non nulles.
2. l décroît avec τ. Le résultat s'interprète facilement : pour une utilité quasi-linéaire, la demande de loisir ne dépend que du prix du loisir $w(1-\tau)$, et pas du revenu $w(1-\tau)T$. La demande Marshallienne est identique à la demande Hicksienne. Il n'y a donc qu'un effet de substitution, et pas d'effet de revenu. Si τ croît, le prix du loisir décroît, la demande de loisir croît et l'offre de travail décroît.
3. Le montant que la taxe rapporte à l'Etat est :

$$\tau w l = w\tau T - \frac{\tau}{1-\tau}$$

C'est une courbe en cloche, qui vaut 0 en $\tau = 0$ et en $\tau = 1 - 1/(wT)$, et qui atteint un maximum en $\tau = 1 - 1/\sqrt{wT}$. On reconnait une courbe de

Laffer. La taxe décourage les agents de travailler. A partir d'un certain seuil, cet effet indirect domine l'effet direct d'accroissement du gain lié à l'accroissemnt de la taxe.
4. La fonction de dépense :

$$e(w(1-\tau), U) = \min_{(C,L)} C + w(1-\tau)L$$
$$\text{s. c. } C + \ln L \geq U$$

soit,

$$\min_{L} U - \ln L + w(1-\tau)L$$

Solution :

$$e(w(1-\tau), U) = U + 1 + \ln e(w(1-\tau))$$

Le montant additionnel de revenu qui permet au consommateur d'obtenir dans l'économie avec taxe la même utilité que celle qu'il avait initialement sans taxe est : $X = -VC$ soit

$$X = e\left\{w(1-\tau), v\left[w, wT\right]\right\} - e\left\{w(1-\tau), v\left[w(1-\tau), w(1-\tau)T\right]\right\}$$

soit :

$$X = w\tau T + \ln(1-\tau)$$

Le montant gagné par l'Etat grâce à la taxe est

$$\tau wl = w\tau T - \frac{\tau}{1-\tau}$$

On vérifie facilement que $\ln(1-\tau) > -\frac{\tau}{1-\tau}$, donc que $X > \tau wl$. Il y a une perte sèche liée à la taxe, qui provient des distorsions crées.

Exercice 2 (10 points) : .

Soit une entreprise dont la technologie est représentée par la fonction de production suivante:

$$Y = \min\left[AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, H\right]$$

où Y désigne la quantité d'output produite, K le stock de capital, L la quantité de travail non-qualifié et H la quantité de travail qualifié. A est un paramètre positif, α est tel que $0 < \alpha < 1$. On note c le coût unitaire du capital, w le coût unitaire du travail non qualifié et x le coût unitaire du travail qualifié.
1. Les rendements sont constants. On peut substituer du capital au travail non qualifié (élasticité de substitution de 1) mais pas au travail non qualifié. Cette hypothèse est une forme extrême pour représenter

la propriété que le capital est plus substituable au travail non qualifié qu'au travail qualifié.
2. Le programme s'écrit :

$$\min_{(K,L,H)} \quad \begin{array}{c} cK + wL + xH \\ \text{s.c. } \min\left[AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, H\right] \geq Y \end{array}$$

Comme aucun facteur n'est gratuit, il est évident que la seule combinaison efficace de facteurs vérifie : $AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = H = Y$. Donc la demande conditionnelle de travail qualifié est $H = Y$.

Les autres demandes conditionnelles sont solutions de :

$$\min_{(K,L)} \begin{array}{c} cK + wL \\ \text{s.c. } AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \geq Y \end{array}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} K &= \frac{Y}{A}\left(\frac{c}{\alpha}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{w}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \\ L &= \frac{Y}{A}\left(\frac{c}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w}{1-\alpha}\right)^{\alpha} \end{aligned}$$

La fonction de coût est donc :

$$C\left(c, w, x, Y\right) = \left[x + \frac{1}{A}\left(\frac{c}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right] Y$$

A augmente : c'est un progrès technique. Il diminue les demandent conditionnelles de K et de L, et laisse inchangé celle de H.
3. Le programme de la firme s'écrit :

$$\max_{Y} \left[P - x - \frac{1}{A}\left(\frac{c}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right] Y$$

D'où trois solutions possibles :

- Si $P < x + \frac{1}{A}\left(\frac{c}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$, $Y = 0$.
- Si $P > x + \frac{1}{A}\left(\frac{c}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$, $Y = +\infty$.
- Si $P = x + \frac{1}{A}\left(\frac{c}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$, Y indéterminé. Ce cas est le seul équilibre concurrentiel possible. On appelle la relation la FPF.

4. Les demandes conditionnelles d'input deviennent :

$$\begin{aligned} H &= Y \\ L &= A^{\frac{-1}{1-\alpha}} Y^{\frac{1}{1-\alpha}} K^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

La fonction de coût de court terme :

$$C(c, w, x, Y, K) = xY + cK + wA^{\frac{-1}{1-\alpha}} Y^{\frac{1}{1-\alpha}} K^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}$$

Coûts marginaux et moyens :

$$\begin{aligned} C_m &= x + \frac{1}{1-\alpha} wA^{\frac{-1}{1-\alpha}} Y^{\frac{1}{1-\alpha}-1} K^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} \\ C_M &= x + \frac{cK}{Y} + wA^{\frac{-1}{1-\alpha}} Y^{\frac{1}{1-\alpha}-1} K^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

Seuil de fermeture donné par le minimum du coût variable moyen, soit

$$\min_Y x + wA^{\frac{-1}{1-\alpha}} Y^{\frac{1}{1-\alpha}-1} K^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} = x$$

Seuil de rentabilité donné par le minimum du coût moyen

$$\min_Y x + \frac{cK}{Y} + wA^{\frac{-1}{1-\alpha}} Y^{\frac{1}{1-\alpha}-1} K^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}$$

CPO :

$$\frac{cK}{Y^2} = \frac{\alpha}{1-\alpha} wA^{\frac{-1}{1-\alpha}} Y^{\frac{1}{1-\alpha}-2} K^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}$$

soit

$$Y = \left(\frac{c}{w}\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha} AK$$

Donc C_M minimum vaut

$$x + \left(\frac{c}{\alpha}\right)^{\alpha} \left(\frac{w}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \frac{1}{A}$$

Offre de la firme : $P \leq x$, $Y = 0$.
$P > x$, Y donné par la condition $C_m = P$.