Chapitre II : Choix du consommateur dans un environnement certain

Propiétés de la fonction d'utilité indirecte :

1. $v(p, b)$ est non croissante (décroissante) par rapport à p: si $p' \geq p$, $v(p, b) \geq v(p', b)$.

2. $v(p, b)$ est non décroissante (croissante) par rapport à b.

3. $v(p, b)$ est homogène de degré 0 par rapport à (p, b).

La fonction de dépense

$$e(p,u) = \min_{(x)} px$$
$$\text{s. c. } u(x) \geq u$$

Les fonctions de demande associées à ce programme sont appelées demandes Hicksiennes, notées : $h(p,u)$.

La fonction de dépense est l'analogue de la fonction de coût pour la production.

Propiétés de la fonction de dépense :

1. $e(p,u)$ est non décroissante (croissante) par rapport à p: si $p' \geq p$, $e(p',u) \geq e(p,u)$.

2. $e(p,u)$ est non décroissante par rapport à u.

3. $e(p,u)$ est homogène de degré 1 par rapport à p.

4. $e(p,u)$ est concave par rapport à p.

5. $h_i(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i}$

Conséquence : La matrice des termes $\left(\partial h_i(p,u)/\partial p_j\right) = \left(\frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_i \partial p_j}\right)$ est symétrique, semi-définie négative. Les demandes Hicksiennes sont décroissantes par rapport au prix :

$$\frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_i^2} \leq 0$$

Quelques identités utiles :

1. $e(p, v(p, b)) \equiv b$

2. $v(p, e(p, u)) \equiv u$

3. $x_i(p, b) \equiv h_i(p, v(p, b))$

4. $h_i(p, u) \equiv x_i(p, e(p, u))$

Identité de Roy

$$\frac{\partial v(p, b)}{\partial p_i} = -x_i(p, b)\frac{\partial v(p, b)}{\partial b}$$

Dém: on a $v(p, e(p, u)) \equiv u$. Ceci est vrai $\forall u$, et $\forall p$. En dérivant par rapport à p_i, et en prenant la dérivée en $u = v(p, b)$ et $b = e(p, u)$

$$\frac{\partial v(p,b)}{\partial p_i} + \frac{\partial v(p,b)}{\partial b}\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = 0$$

or

$$h_i(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i}$$

ce qui donne en $u = v(p, e(p, u))$:

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = h_i(p, v(p, e(p,u))) = x_i(p,b)$$

L'équation de Slutsky

$$\frac{\partial x_j(p,b)}{\partial p_i} = \frac{\partial h_j(p,v(p,b))}{\partial p_i} - \frac{\partial x_j(p,b)}{\partial b} x_i(p,b)$$

Effet de substitution et effet de revenu.

dém : On part de l'identité

$$h_j(p,u) \equiv x_j(p,e(p,u))$$

Ceci est vrai $\forall u$, et $\forall p$. On différencie par rapport à p_i pour u donné, et on prend $u = v(p,b)$. Donc $e(p,u) = b$.

$$\frac{\partial h_j(p,v(p,b))}{\partial p_i} = \frac{\partial x_j(p,b)}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j(p,b)}{\partial b}\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i}$$

et

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = x_i(p,b)$$

Mesurer l'utilité en équivalent monétaire

La fonction d'utilité en équivalent monétaire :

$$m(p,x) \equiv e\left[p, u(x)\right] = \begin{array}{c} \min\limits_{(z)} pz \\ \text{s. c. } u(z) \geq u(x) \end{array}$$

Pour p donné, $m(p,x)$ est une transformation croissante de la fonction d'utilité.

La fonction d'utilité indirecte en équivalent monétaire :

$$\mu(q;p,b) \equiv e\left[q, v(p,b)\right] = \begin{array}{c} \min\limits_{(z)} qz \\ \text{s. c. } u(z) \geq v(p,b) \end{array}$$

C'est la somme nécessaire au prix q pour avoir le même niveau de satisfaction que quand les prix sont p. Pour p donné, c'est la fonction d'utilité indirecte par rapport à (q, b) associée à la fonction d'utilité $m(p, x)$.

Variation compensatoire, variation équivalente

Contexte : Soit un consommateur pour lequel

$$\begin{aligned} b &\longrightarrow b' \\ p &\longrightarrow p' \end{aligned}$$

Pb : mesurer en équivalent monétaire sa perte/son gain en utilité.

Variation Equivalente :

$$\begin{aligned} VE &= \mu(p; p', b') - \mu(p; p, b) = e\left[p, v(p', b')\right] - e\left[p, v(p, b)\right] \\ &= e\left[p, v(p', b')\right] - b \end{aligned}$$

Interprétation : si on donne à l'agent le revenu $b + VE$ (au lieu de b), les prix étant p, il obtient l'utilité $v(p', b')$.

Cf. l'identité :

$$v\left\{p, e\left[p, v(p', b')\right]\right\} = v(p', b')$$

Variation Compensatoire :

$$\begin{aligned} VC &= \mu(p'; p', b') - \mu(p'; p, b) = e\left[p', v(p', b')\right] - e\left[p', v(p, b)\right] \\ &= b' - e\left[p', v(p, b)\right] \end{aligned}$$

Interprétation : si on donne à l'agent le revenu $b' - VC$ (au lieu de b'), les prix étant p', il obtient l'utilité $v(p, b)$.

Cf. l'identité :

$$v\left\{p', e\left[p', v(p, b)\right]\right\} = v(p, b)$$

En pratique, faut-il utiliser VE ou VC ?

D'après les définitions, $VE > 0 \Leftrightarrow VC > 0 \Leftrightarrow v(p', b') > v(p, b)$.

Deux mesures du gain/de la perte lié(e) au changement d'environnement.

Les choix intertemporels

En posant

$$\begin{aligned}1+r &= \frac{1+i}{1+a}\\ Y_0 &= \frac{R_0}{P_0}\\ Y_1 &= \frac{R_1}{P_1}\end{aligned}$$

On obtient la contrainte budgétaire intertemporelle :

$$C_0 + \frac{C_1}{1+r} = Y_0 + \frac{Y_1}{1+r} = \Omega$$

soit encore :

$$(1+r)C_0 + C_1 = (1+r)Y_0 + Y_1$$

$p_0 = (1+r)$ est le prix de C_0, $p_1 = 1$ est le prix de C_1, $b = (1+r)Y_0 + Y_1$ est le revenu.

Le programme du consommateur :

$$\max U\left(C_0, C_1\right)$$

$$s.c. (1+r)C_0 + C_1 = (1+r)Y_0 + Y_1$$

conduit aux fonctions de demande Marshallienne :

$$\begin{aligned} C_0 &= c_0\left[1+r, 1, (1+r)Y_0 + Y_1\right] \\ C_1 &= c_1\left[1+r, 1, (1+r)Y_0 + Y_1\right] \end{aligned}$$

On obtient également l'épargne réelle par :

$$S = Y_0 - C_0 = Y_0 - c_0\left[1+r, 1, (1+r)Y_0 + Y_1\right]$$

Impact d'une variation de r sur l'épargne ? (c'est l'opposé de l'impact sur C_0)

On a :

$$\frac{\partial C_0}{\partial r} = \frac{\partial c_0}{\partial p_0} + Y_0 \frac{\partial c_0}{\partial b}$$

D'après Slutsky :

$$\frac{\partial c_0}{\partial p_0} = \frac{\partial h_0}{\partial p_0} - c_0 \frac{\partial c_0}{\partial b}$$

Donc :

$$\frac{\partial C_0}{\partial r} = \frac{\partial h_0}{\partial p_0} + (Y_0 - c_0) \frac{\partial c_0}{\partial b}$$

On sait que $\frac{\partial h_0}{\partial p_0} < 0$: effet de substitution négatif. Si le bien C_0 est normal, le second terme (effet de revenu) est négatif si $Y_0 < c_0$ (si l'agent est emprunteur), positif si $Y_0 > c_0$ (si l'agent épargne).

Interprétation : si r augmente, un emprunteur est moins riche (effet de revenu négatif) alors qu'un épargant est plus riche.

Pour un agent emprunteur, on a donc $\frac{\partial C_0}{\partial r} < 0$ et $\frac{\partial S}{\partial r} > 0$.

Pour un agent épargant, l'effet global est indéterminé.