

# Système de Retraite Redistributif, Inégalités et Accumulation du Capital

20 juin 2007

*Version Préliminaire*

**Christophe Hachon**

CES, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne  
106-112 Boulevard de l'hôpital 75 013 Paris

**Résumé :** Dans une économie dont la variable d'accumulation est le capital physique, et composée d'agents hétérogènes en terme de productivité et de durée de vie, nous montrons qu'un accroissement de la redistributivité d'un système de retraite par répartition à Générosité-Définie peut permettre : de réduire le taux de taxe nécessaire au financement du système de retraite, d'accroître l'accumulation du capital physique, de réduire les inégalités de consommation et de contribution nette à ce système. En revanche, pour un système de retraite par répartition à Contribution-Définie, une plus grande redistributivité : accroît le taux de remplacement, peut réduire le niveau de capital par tête stationnaire ainsi que la consommation des agents les plus riches ; mais elle peut également accroître celle des plus pauvres et donc réduire les inégalités de consommation. Enfin, nous montrons en quoi les systèmes Bismarkiens purs sont anti-redistributifs.

## 1 Introduction

La prise en compte de l'hétérogénéité d'une population est un élément important à prendre en compte lorsque l'on cherche à analyser l'espérance de vie des agents d'une économie. Ainsi, il existe des disparités selon le sexe puisque les femmes vivent en moyenne 84.1 ans et les hommes 77.2 ans en 2006 (*Source* : INSEE). De même, il existe des disparités selon la zone géographique d'habitation (Rican et Salem [1999]). Enfin, il peut

exister des disparités selon la catégorie socio-professionnelle (CSP) d'appartenance (Mesrine [1999]). Le tableau ci-dessous résume les principaux chiffres de cette inégalité face à la mort selon la CSP :

CSP	Probabilité de décéder entre 35 et 65 ans (en %)	Espérance de vie à 35 ans (en années)
Cadres, Professions Libérales	13	44.5
Agriculteurs exploitants	15.5	43
Professions Intermédiaires	17	42
Artisans, Commerçants et Chefs d'entreprise	18.5	41.5
Employés	23	40
Ouvriers	26	38
<i>Actifs</i>	21.5	40.5
<i>Inactifs (hors retraités)</i>	41.5	34
Ensemble	22	40

*Source* : Mesrine [1999].

En regardant de façon plus détaillée ces chiffres, nous constatons qu'une personne exerçant une profession libérale a une probabilité de décéder entre 35 et 65 ans presque deux fois plus faible qu'un ouvrier non-qualifié. De plus, leur espérance de vie respective à 35 ans est 44 ans et 37 ans.

Robert-Bobée et Cadot [2007] montrent également que cette inégalité face à la mort en fonction de la CSP perdure aux grands âges. A 86 ans, les plus diplômés peuvent espérer vivre 20% plus longtemps que les non-diplômés. Toutefois cette inégalité s'estompe avec l'âge atteint du fait d'un phénomène de sélection dans la population.

Par conséquent, il semble évident que l'hétérogénéité en terme de salaire est liée à l'hétérogénéité en terme de durée de vie. Les systèmes de retraites par répartition actuels peuvent chercher à corriger la première forme d'hétérogénéité en adoptant deux schémas ou un mix de ceux-ci. Le premier système est dit Bismarkien en ce sens que le montant des pensions reçu dépend uniquement de son histoire sur le marché du travail. Le deuxième système est dit Beveridgien et assure une pension égale pour tous les acteurs de l'économie quelle que soit leur histoire sur le marché du travail. Par définition ce système est considéré comme redistributif. Nous pouvons alors nous interroger sur les conséquences en terme d'accumulation du capital physique d'un accroissement de la redistributivité du système de retraite, i.e. du passage progressif vers un système Beveridgien. Intuitivement, dans le

cas d'un système de retraite par répartition à Générosité-Définie accroître celle-ci revient à réduire le montant des pensions versées aux agents dont le salaire et la durée de vie sont les plus grands. Or, c'est justement parce que leur durée de vie est grande que ceux-ci vont devoir épargner plus pour compenser cette perte de ressources. Ceci va accroître le montant total épargné si cette hausse de l'épargne des agents à haut salaire n'est pas plus que compensée par la baisse de l'épargne des agents à faible salaire. De plus, puisque le montant des pensions versées est réduit pour les personnes dont la durée de vie est la plus longue, le taux de taxe nécessaire au financement du système de retraite est plus faible. Les conséquences en terme de réduction des inégalités de consommation sont presque immédiates. En revanche, dans le cas d'un système de retraite par répartition à Contribution-Définie, l'accroissement de la redistributivité permet d'accroître le taux de remplacement de ce système ce qui va jouer négativement sur l'épargne. Les effets sont par conséquent plus ambigus que précédemment et tendent plutôt à montrer qu'il existe dans ce cadre un arbitrage entre la taille du gâteau et la répartition de celui-ci.

Dans la littérature prenant en compte l'hétérogénéité des agents en présence d'un système de retraite, se pose la question de savoir quelles sont les conséquences de la taille du système de retraite sur les variables économiques en présence d'un schéma Bismarkien ou Beveridgien<sup>1</sup>. Néanmoins, peu d'articles s'intéressent aux conséquences d'une modification de la redistributivité d'un système de retraite. Sommacal [2004] montre qu'un accroissement de la redistributivité d'un système de retraite en présence d'une offre de travail de première période endogène n'a pas d'impact sur le niveau de capital par tête stationnaire et tous les revenus des agents se réduisent dans une même proportion. Dans ce modèle, seule l'introduction d'un salaire minimum pour les moins qualifiés permet de justifier une réduction des inégalités de revenus lorsque la taille du système Beveridgien s'accroît.

La littérature sur les inégalités face à la mort est encore plus réduite. Drouhin [2001] a montré dans le cadre d'une petite économie ouverte, que le système de retraite par répartition pouvait provoquer un transfert des agents à faible espérance de vie vers les agents à forte espérance de vie, et une perte de bien-être pour les agents à faible espérance de vie. La séparation des risques est alors une solution pour remédier à cela. Toutefois, cette analyse se situe dans un cadre Bismarkien et n'intègre pas de dynamique d'équilibre général. Cremer et al [2007] montrent dans un cadre de petite économie ouverte que l'existence d'un système de retraite redistributif en terme de revenu pouvait avoir un effet net redis-

---

<sup>1</sup>Par exemple, Docquier et Paddison [2003] étudient ces effets en terme d'incitation à l'accumulation de capital humain et sur les inégalités. Le Garrec [2005] quant à lui soutient qu'un système de retraite Bismarkien permet d'accroître le taux de croissance d'une économie fondée sur le capital humain et de réduire les inégalités de bien-être.

tributif ambigu puisque les agents les plus riches redistribuent une partie de leur revenu aux agents à faible productivité mais puisque les premiers vivent plus longtemps, alors ils profiteront pendant une plus longue période de leur pension.

Notre apport permet par conséquent de compléter cette littérature. En effet, nous montrons que pour étudier les conséquences de la redistributivité du système de retraite, il est nécessaire de prendre en compte les inégalités de salaires et les inégalités de durée de vie. Si la durée de vie dépend positivement du niveau de productivité du travail<sup>2</sup>, alors dans le cas d'un système de retraite à Générosité-définie (Contribution-Définie), le taux de taxe (remplacement) nécessaire au financement du système de retraite est une fonction décroissante (croissante) du degré de redistributivité du système de retraite. Mais nous montrons également que le niveau stationnaire de capital par tête, et les inégalités relatives de consommation peuvent être respectivement des fonctions croissantes et décroissantes de cette redistributivité. Néanmoins, ces résultats sont contingents au mode d'organisation du système de retraite, puisque si la règle adoptée est de raisonner à Contribution-Définie alors nous montrons qu'il est très probable que le niveau stationnaire de capital par tête et le niveau de consommation des plus riches soient tous deux des fonctions décroissantes de la redistributivité de ce système, tandis que celle-ci ne permet que d'accroître la consommation des plus pauvres.

Enfin, nous montrons qu'un système Bismarkien introduit une inégalité de contribution au système de retraite puisque les plus pauvres (riches) ont une contribution nette positive (négative). En revanche, un système Beveridgien assure une redistribution des ressources.

Nous allons tout d'abord présenter la structure du modèle de base. Nous spécifierons ensuite la dynamique d'accumulation de notre économie et ses propriétés. Puis, dans les deux sections suivantes, nous étudierons successivement les inégalités de consommation et les inégalités de contribution au système de retraite. Ensuite, un petit exercice de calibration et de résolution nous permet de chiffrer les résultats de notre modèle. Enfin, nous donnerons quelques remarques qui concluront notre propos. Les annexes fourniront les preuves de nos principales propositions.

---

<sup>2</sup>Nous faisons ici implicitement l'hypothèse que chaque CSP est associée à une productivité du travail différente.

## 2 Le Modèle

### 2.1 Les Agents Consommateurs

On suppose que l'économie est composée à chaque instant  $t$  de deux générations : les jeunes et les vieux, dont la taille de population est respectivement  $N_t$  et  $N_{t-1}$ . La population croît à un taux exogène et constant  $n$  de sorte que :  $N_t = (1 + n)N_{t-1}$ . Les membres de chaque génération sont hétérogènes. En effet, on suppose qu'à chaque naissance d'une génération un tirage aléatoire est effectué et chaque agent intervient dans l'économie avec une productivité  $a_i$ , qui peut prendre ses valeurs dans l'intervalle :  $\Omega_a = [a_-, a_+]$ . La densité de cette variable aléatoire est notée  $f(a_i)$  et sa fonction de répartition  $F(a_i)$ . Nous avons donc  $\int_{\Omega_a} f(a_i) da_i = 1$ . De plus, nous noterons  $\bar{a}$ , le niveau de productivité moyen par agent déterminé par l'équation suivante :

$$\bar{a} = \int_{\Omega_a} a_i f(a_i) da_i$$

Nous supposons également que cette distribution est indépendante du temps et du niveau d'accumulation du capital. Ainsi la fraction des agents appartenant à chaque catégorie de la population est constante.

Chaque agent né en  $t$  vit de façon certaine sa première période de vie<sup>3</sup> et une fraction  $T(a_i)$  de sa seconde période de vie. Il retire une utilité de ses flux de consommation  $c_t^i$  et  $d_{t+1}^i/T(a_i)$ . Sa fonction d'utilité est supposée être intertemporellement séparable. Nous avons donc :

$$U_t = u(c_t^i) + \beta T(a_i) u\left(\frac{d_{t+1}^i}{T(a_i)}\right)$$

$\beta$  est le taux de préférence pur pour le présent, et le  $T(a_i)$  devant l'utilité de la seconde période de vie représente le poids accordé par l'agent pour celle-ci. Plus la durée de la vie est importante et plus l'agent accordera un poids important au futur dans son utilité<sup>4</sup>. Nous noterons par la suite  $\bar{T}$ , la moyenne de l'espérance de vie de la population. Elle est déterminée comme :

$$\bar{T} = \int_{\Omega_a} T(a_i) f(a_i) da_i$$

La durée de vie propre à chaque agent est liée à sa productivité. Plus le niveau de productivité de l'agent est important et plus sa durée de vie est grande ( $T'(a) > 0$ ). Le

---

<sup>3</sup>dont la durée est normée à l'unité.

<sup>4</sup>Voir d'Autume [2003]

lien entre ces deux variables est mesuré par leur covariance calculée de la façon suivante :

$$COV_{T(a),a} = \int_{\Omega_a} T(a_i)a_i f(a_i) da_i - \bar{T}\bar{a} \quad (1)$$

Puisque  $T(a_i)$  est liée positivement à  $a_i$  alors la covariance entre ces deux variables est positive.

Nous supposons de plus que chaque agent offre de façon inélastique son travail pendant sa première période de vie et obtient un salaire  $w_t^i$ . Ce salaire est taxé à un taux  $\tau$ . Cette taxe est utilisée en vue de financer un système de retraite par répartition. Chaque agent reçoit donc lorsqu'il est vieux une pension  $p_{t+1}^i$ . Si l'on note  $S_t$  le montant épargné par l'agent alors ses contraintes budgétaires peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} c_t^i &= w_t^i(1 - \tau) - S_t^i \\ d_{t+1}^i &= R_{t+1}S_t^i + p_{t+1}^i \end{aligned}$$

En utilisant une fonction d'utilité de la forme :  $u(x) = \ln(x)$ , on obtient la fonction d'épargne suivante :

$$S_t^i = \frac{\beta T(a_i)w_t^i(1 - \tau)R_{t+1} - p_{t+1}^i}{(1 + \beta T(a_i))R_{t+1}} \quad (2)$$

avec  $R_{t+1}$  le facteur d'intérêt rémunérant l'épargne de l'agent.

## 2.2 Les Firmes

Les entreprises dans cette économie sont supposées être en concurrence pure et parfaite sur le marché du bien numéraire et des facteurs de production. Leur fonction de production est de la forme :

$$Y_t = AK_t^\alpha \left( \int_{\Omega_a} a_i f(a_i) N_t da_i \right)^{1-\alpha} \quad (3)$$

Puisque ces entreprises sont en concurrence pure et parfaite, la rémunération des facteurs de production s'effectue à leur productivité marginale. Nous aurons par conséquent pour le capital :

$$R_t = A\alpha K_t^{\alpha-1} \left( \int_{\Omega_a} a_i f(a_i) N_t da_i \right)^{1-\alpha} \equiv A\alpha k_t^{\alpha-1} \bar{a}^{1-\alpha} \quad (4)$$

en notant  $k_t \equiv K_t/N_t$ , i.e. le niveau de capital par agent jeune de la période considérée.

De même, le salaire par unité de travail efficace est le suivant :

$$w_t = A(1 - \alpha)K_t^\alpha \left( \int_{\Omega_a} a_i f(a_i) N_t da_i \right)^{-\alpha} \equiv A(1 - \alpha) \frac{k_t^\alpha}{\bar{a}^\alpha}$$

Pour les individus dont la productivité est  $a_i$  leur salaire par unité de temps de travail est :

$$w_t^i = w_t a_i = A(1 - \alpha) \frac{k_t^\alpha}{\bar{a}^\alpha} a_i \quad (5)$$

Ceci implique que les niveaux de salaires relatifs entre les différents groupes d'agents sont constants quel que soit le niveau d'accumulation du capital physique. En revanche, les différences absolues de salaire entre les différents groupes sont des fonctions croissantes du niveau d'accumulation du capital physique.

Nous noterons par la suite  $\bar{w}_t$  le salaire moyen de l'économie à la période  $t$ . Il est défini par :

$$\bar{w}_t = \int_{\Omega_a} w_t^i f(a_i) da_i \quad (6)$$

soit :

$$\bar{w}_t = A(1 - \alpha) k_t^\alpha \bar{a}^{1-\alpha} \quad (7)$$

## 2.3 La Caisse de Retraite

La caisse de retraite utilise un système par répartition en vue d'assurer un revenu aux vieux à chaque période. Ces revenus sont supposés être une moyenne pondérée des salaires obtenus sur le marché du travail par les jeunes ayant le même niveau de productivité et du salaire moyen de l'économie à cette même période. Leur pondération respective est  $\lambda$  et  $(1 - \lambda)$ . Nous supposons de plus que l'agent ne perçoit qu'une fraction  $\nu$  de ceci ( $0 < \nu \leq 1$ ), et uniquement pendant sa durée de vie  $T(a_i)$ .

Nous aurons ainsi :

$$p_{t+1}^i = \nu (\lambda w_{t+1}^i + (1 - \lambda) \bar{w}_{t+1}) T(a_i)$$

A partir des équations (5) et (7), nous obtenons :

$$p_{t+1}^i = \nu A(1 - \alpha) \frac{k_{t+1}^\alpha}{\bar{a}^\alpha} (\lambda a_i + (1 - \lambda) \bar{a}) T(a_i) \quad (8)$$

L'équilibre de la caisse de retraite implique que :

$$\int_{\Omega_a} \tau w_{t+1}^i f(a_i) N_{t+1} da_i = \int_{\Omega_a} p_{t+1}^i f(a_i) N_t da_i \quad (9)$$

On montre en Annexe A que ceci conduit à la relation suivante :

$$\tau = \frac{\nu}{1+n} \left( \lambda \frac{COV_{T(a),a}}{\bar{a}} + \bar{T} \right) \quad (10)$$

Cette équation définit le taux de taxe en fonction des paramètres du modèle. Nous dirons alors qu'il caractérise un système de retraite à Générosité-Définie (Defined-Benefit).

**Proposition 1 :** *Le taux de taxe nécessaire au financement du système de retraite à Générosité-Définie est une fonction décroissante de la redistributivité de celui-ci, mesurée par  $(1-\lambda)$ , si et seulement si  $COV_{T(a),a} > 0$ , i.e. s'il existe des inégalités de durée de vie.*

Cette proposition s'explique facilement dans la mesure où plus les agents sont riches et plus leur durée de vie est longue et donc la durée pendant laquelle la pension leur est versée est importante. Par conséquent un accroissement de  $\lambda$  (i.e. une baisse de la redistributivité du système de retraite) va augmenter l'indexation des pensions des hauts revenus sur leur salaire et ce pour une longue période. Il faudra donc accroître le taux de taxe pour financer ce montant des pensions plus élevé.

Remarquons que ce résultat dépend uniquement de la contrainte d'équilibre budgétaire de l'Etat et non de la forme des préférences des agents.

Si maintenant le système de retraite est organisé à Contribution-Définie ( $\tau$  fixé), alors c'est le taux de remplacement  $\nu$  qui s'ajuste de façon à garantir l'équilibre du système de retraite. Celui-ci s'écrit :

$$\nu = \frac{\tau(1+n)}{\left( \lambda \frac{COV_{T(a),a}}{\bar{a}} + \bar{T} \right)} \quad (11)$$

Nous supposons que les paramètres sont fixés de telle sorte que  $\nu \leq 1$ .

**Proposition 1 (bis) :** *Le taux de remplacement du système de retraite organisé à Contribution-Définie est une fonction croissante de la redistributivité de ce système si et seulement si  $COV_{T(a),a} > 0$ .*

Nous remarquons alors que ce taux de remplacement est une fonction croissante de la redistributivité du système de retraite pour les mêmes raisons que celles citées ci-dessus, i.e. que puisque ce sont les personnes dont la durée de vie est la plus faible qui vont bénéficier de cette redistribution, le montant total distribué à  $\nu$  constant est plus fort, ce qui permet d'accroître ce même taux de remplacement pour tous les agents.

**Corollaire 1 :** *En régime de retraite à Générosité-Définie (Contribution-Définie), le taux de taxe (de remplacement) est indépendant de la redistributivité du système de retraite si et seulement si il n'existe pas de disparités en terme de durée de vie.*

Ce deuxième point est important et explique pourquoi la littérature qui intègre ces éléments de redistribution n'étudie pas l'impact de celle-ci sur les variables macro-économiques via le taux de taxe. A durée de vie égale entre les agents, la modification de la redistributivité du système de retraite n'affecte pas le montant total des pensions versées.

### 3 La Dynamique et ses Propriétés

Puisque dans cette économie le seul facteur accumulable est le capital physique et que les rendements marginaux de ce facteur de production sont décroissants alors la dynamique de cette économie va conduire à un équilibre du capital par agent jeune stationnaire. Le marché du capital est équilibré si et seulement si :

$$K_{t+1} = \int_{\Omega_a} S_t^i f(a_i) N_t da_i$$

On montre dans l'Annexe B que ceci conduit à la relation suivante :

$$k_{t+1} \left[ 1 + n + \nu \frac{1-\alpha}{\alpha} \int_{\Omega_a} \frac{\lambda \frac{a_i}{\bar{a}} + (1-\lambda)}{1+\beta T(a_i)} T(a_i) f(a_i) da_i \right] = \frac{\beta A(1-\alpha)(1-\tau) k_t^\alpha}{\bar{a}^\alpha} \int_{\Omega_a} \frac{T(a_i) a_i}{1+\beta T(a_i)} f(a_i) da_i$$

On constate que le membre de droite est une fonction strictement concave de  $k_t$ . Il existe donc un état stationnaire unique, caractérisé par la relation suivante :

$$(k^*)^{1-\alpha} = \frac{\frac{\beta A(1-\alpha)(1-\tau)}{\bar{a}^\alpha} \int_{\Omega_a} \frac{T(a_i) a_i}{1+\beta T(a_i)} f(a_i) da_i}{1 + n + \nu \frac{1-\alpha}{\alpha} \int_{\Omega_a} \frac{\lambda \frac{a_i}{\bar{a}} + (1-\lambda)}{1+\beta T(a_i)} T(a_i) f(a_i) da_i} \quad (12)$$

**Proposition 2 :** *Pour que le niveau stationnaire de capital par tête soit une fonction croissante (décroissante) de la redistributivité du système de retraite à Générosité-Définie mesurée par  $1 - \lambda$  ( $\lambda$ ) il suffit que<sup>5</sup> :*

$$\int_{\Omega_a} \frac{a_i - \bar{a}}{1 + \beta T(a_i)} T(a_i) f(a_i) da_i \geq 0 \quad (13)$$

---

<sup>5</sup>Un petit exemple numérique suffit à prouver que cette condition représente un ensemble non-nul. Prenons le cas très simple où  $a_i$  est distribué uniformément sur l'intervalle  $[0.5, 1]$ . Sa fonction de densité est alors  $f(a_i) = 2, \forall a_i$ , et sa moyenne  $\bar{a}$  est égale à 0.75. On suppose de plus que la durée de vie dépend de la productivité du travail de la façon suivante :  $T(a_i) = a_i$ . Alors, pour  $\beta = 0.3$ , on trouve que cette intégrale est égale à 0.0139.

**Preuve** : voir Annexe C.□

Cette proposition est assez intuitive. En effet, la baisse du taux de taxe sur les revenus de première période aura un effet positif sur l'épargne de tous les agents quelle que soit leur durée de vie. De plus, lorsque le système devient plus redistributif, les agents ayant la durée de vie la plus longue vont recevoir une pension plus faible compte tenu de leurs revenus d'activité. Or, c'est précisément parce qu'ils ont une durée de vie plus longue, que ceux-ci seront fortement incités à beaucoup épargner ce qui favorisera l'accumulation du capital. Cet effet l'emporte sur l'effet baisse de l'épargne pour tous les agents dont la productivité du travail est inférieure à la productivité moyenne si la condition énoncée ci-dessus est respectée. Dans le cas où cette condition ne serait pas respectée, cela signifierait que la baisse de l'épargne des plus pauvres est plus importante que la hausse de l'épargne des plus riches. L'effet global sur l'épargne est alors ambigu.

**Proposition 2 (bis)** : *Dans le cadre d'un système de retraite à Contribution-Définie, un accroissement de la redistributivité du système de retraite a un impact positif si et seulement si*

$$\frac{COV_{T(a),a}}{\bar{T}} \leq \frac{\int_{\Omega_a} \frac{a_i - \bar{a}}{1 + \beta T(a_i)} T(a_i) f(a_i) da_i}{\int_{\Omega_a} \frac{1}{1 + \beta T(a_i)} T(a_i) f(a_i) da_i}$$

**Preuve** : voir Annexe C.□

L'idée de cette proposition est elle aussi relativement simple. Ici, deux effets agissent de façon contraire. Le premier est le même que celui cité ci-dessus à savoir qu'une hausse de la redistributivité incite les agents à fort revenu et à haute espérance de vie à épargner plus pour compenser la perte de revenu dû à cette redistributivité. Cet effet est positif sur l'épargne s'il est plus important que la baisse de l'épargne engendrée pour les agents à faible productivité. En revanche, la hausse de la redistributivité permet d'accroître le taux de remplacement ( $\nu$ , voir proposition 1 (bis)). Ceci conduit à une diminution de l'épargne pour l'ensemble des agents de l'économie. L'effet net est donc positif si le premier effet l'emporte sur tous les autres.

**Proposition 3** : *Si la durée de vie est la même pour tous, alors le niveau de capital par tête stationnaire est indépendant du niveau de redistributivité ( $\lambda$ ) du système de retraite quel que soit son mode d'organisation.*

**Preuve :** En observant l'équation (12), on constate que  $\tau$  et le numérateur deviennent indépendants de  $\lambda$  si  $T(a_i) = T, \forall a_i$ .  $\square$

L'idée de cette proposition est la suivante : lorsque la durée de vie est la même pour tous, accroître la redistributivité du système de retraite va réduire l'épargne des personnes pour lesquels  $a_i \leq \bar{a}$ , et accroître celle des personnes pour lesquelles  $a_i \geq \bar{a}$ , et ce d'un même montant. De plus, on sait grâce au corollaire 1 que le taux de taxe devient lui-même indépendant de  $\lambda$ . Au final, nous avons bien que  $k^*$  est indépendant de  $\lambda$  pour une durée de vie commune à tous les agents.

Ce résultat de neutralité prévaut pour toutes les fonctions d'utilité permettant d'obtenir une fonction d'épargne qui est une fonction affine de la pension reçue en deuxième période.

## 4 Redistributivité et Inégalités de Consommation

Nous allons ici comparer les niveaux de consommation qui peuvent être atteints par les agents de cette économie et notamment entre deux groupes d'agents ayant des productivités différentes et plus précisément entre ceux ayant la productivité la plus haute ( $a_+$ ) et ceux ayant la productivité la plus faible ( $a_-$ ).

Le niveau de consommation de première période pour un agent de type  $a_i$  s'écrit<sup>6</sup> :

$$c_t^i = \frac{w_t^i(1 - \tau)R_{t+1} + p_{t+1}^i}{(1 + \beta T(a_i))R_{t+1}} \quad (14)$$

De même nous pouvons écrire que :

$$d_{t+1}^i = \beta T(a_i)R_{t+1}c_t^i \quad (15)$$

**Proposition 4 :** Si la condition (13) est vérifiée, alors l'inégalité relative du niveau de consommation à l'état stationnaire :  $c^-/c^+$ , et donc  $d^-/d^+$ , est une fonction croissante de la redistributivité  $(1 - \lambda)$  du système de retraite à Générosité-Définie si<sup>7</sup> :

$$\frac{T(a_-)}{a_-} \geq \frac{T(a_+)}{a_+} \quad (16)$$

**Preuve :** Voir Annexe D.  $\square$

---

<sup>6</sup>Cette équation est obtenue à partir des contraintes budgétaires de l'agent et de l'équation (2).

<sup>7</sup>C'est une condition suffisante.

Si la condition (13) est vérifiée, tous les agents bénéficient de la hausse de revenu permise par l'accroissement du niveau de capital par tête, et les inégalités relatives de salaire restent inchangées. Mais puisque la pension des plus démunis est plus fortement indexée sur le salaire des plus riches, les écarts de revenus sont moindres. De plus, la hausse de  $k$  va réduire les revenus de l'épargne  $R$ . Or, ce sont les personnes les plus riches qui vont accroître leur épargne suite à la baisse de  $\lambda$ . Ceci conduit également à réduire les inégalités relatives de consommation.

**Proposition 4 (bis) :** *Dans le cadre d'un régime de retraite à Contribution-Définie, si la condition énoncée dans le proposition 2 (bis) est vérifiée, alors la condition suivante est suffisante pour qu'il y ait une baisse des inégalités relatives de consommation suite à une plus grande redistributivité :*

$$\frac{T(a_-)}{a_-} > \frac{T(a_+)}{a_+} \times \frac{\lambda \frac{a_+}{\bar{a}} + 1 - \lambda}{\lambda \frac{a_-}{\bar{a}} + 1 - \lambda}$$

**Preuve :** Voir Annexe D.  $\square$

Le raisonnement est le même que précédemment mais la condition suffisante est plus restrictive puisque l'accroissement de la redistributivité permet d'augmenter le taux de remplacement ce qui bénéficie essentiellement aux plus riches. Pour une valeur de  $\lambda$  proche de 1, cette condition ne peut être vérifiée et l'impact est alors ambigu. Il est donc possible qu'un accroissement de la redistributivité d'un système de retraite, si celui-ci est initialement Bismarkien et à Contribution-Définie, conduise à une hausse des inégalités relatives de consommation.

Il nous reste maintenant à étudier l'impact de la redistributivité sur les niveaux absolus de consommation des agents.

La fonction de consommation de première période peut s'écrire :

$$c^i = \frac{A(1 - \alpha) \frac{k^\alpha}{\bar{a}^\alpha} a_i (1 - \tau) + \nu \frac{1 - \alpha}{\alpha} k \left( \lambda \frac{a_i}{\bar{a}} + (1 - \lambda) \right) T(a_i)}{1 + \beta T(a_i)}$$

**Proposition 5 :** *Dans le cas d'un régime de retraite à Générosité-Définie alors :*

- Si la condition (13) est respectée :
- Pour tous les agents pour lesquels  $a_i \leq \bar{a}$ , l'impact d'une plus grande redistributivité du système de retraite sur le niveau absolu de consommation est positif. En

revanche, pour tous les agents pour lesquels  $a_i > \bar{a}$  l'impact global d'une baisse de  $\lambda$  sur le niveau de consommation est ambigu.

- Sous la condition ci-dessous, une plus grande redistributivité permet d'accroître les niveaux de consommation de tous les agents :

$$-\frac{dk}{d\lambda} \geq \frac{\frac{a_i}{\bar{a}} - 1}{\lambda \frac{a_i}{\bar{a}} + 1 - \lambda} \quad (17)$$

pour tout  $a_i$ .

- Sinon, l'impact est ambigu pour tous les agents.

**Preuve :** voir Annexe G.  $\square$

L'idée de cette proposition est assez simple. Lorsque l'on accroît la redistributivité d'un système de retraite, nous avons vu que cela avait un impact positif sur le niveau du capital par tête et négatif sur le taux de taxe nécessaire au financement du système de retraite. De plus, le rapport  $w/R$  est lui aussi une fonction décroissante de  $\lambda$ . Tout ceci conduit à un accroissement de la richesse actualisée de l'agent, et par conséquent à un effet positif sur sa consommation. Enfin, les agents ayant une productivité telle que  $a_i \leq \bar{a}$ , vont également bénéficier de ce partage des salaires. En revanche, pour les agents pour lesquels  $a_i > \bar{a}$ , le fait d'augmenter la redistributivité va réduire l'indexation de leur pension sur leur salaire ce qui va réduire le montant de leur pension.

L'accroissement de la redistributivité n'a que des effets bénéfiques pour les agents ayant la productivité la plus faible, tandis que pour ceux ayant une productivité supérieure à la moyenne, une baisse de l'indexation réduit le montant de la pension qui est versée. Mais ce que l'on a montré, c'est que trois autres effets venaient contre-carrer cet effet négatif. Il est donc fortement probable qu'une baisse de  $\lambda$  bénéficie à tous les agents de l'économie.

**Proposition 5 (bis) :** Dans le cas d'un régime de retraite à Contribution-Définie alors :

- Si la condition de la proposition 2 (bis) est respectée :
  - Pour tous les agents pour lesquels  $a_i \leq \bar{a}$ , l'impact d'une plus grande redistributivité du système de retraite sur le niveau absolu de consommation est positif. En revanche, pour tous les agents pour lesquels  $a_i > \bar{a}$  l'impact global d'une baisse de  $\lambda$  sur le niveau de consommation est ambigu.
  - Sous la condition ci-dessous, une plus grande redistributivité permet d'accroître

les niveaux de consommation de tous les agents :

$$-\frac{\nu \frac{dk}{d\lambda} + k \frac{d\nu}{d\lambda}}{k} \geq \frac{\frac{a_i}{\bar{a}} - 1}{\lambda \frac{a_i}{\bar{a}} + 1 - \lambda} \quad (18)$$

pour tout  $a_i$ .

– Sinon, l'impact est ambigu pour tous les agents.

**Preuve** : voir Annexe G.  $\square$

Le principe est le même que celui de la proposition précédente sauf que les agents les plus riches bénéficient en deuxième période d'une hausse du taux de remplacement ce qui peut accroître leur niveau de consommation de toutes les périodes du fait d'un effet revenu.

## 5 Redistributivité et Inégalités de Contribution au Système de Retraite

Ce qui nous intéresse dorénavant, c'est la contribution nette de chaque groupe d'agent au système de retraite. L'objectif est de savoir si à une date donnée, un groupe d'agents à productivité donnée, a une différence entre le montant de sa contribution et de la pension qu'il perçoit qui est positive ou négative.

Le montant total versé par un groupe d'agent dont la productivité est  $a_i$  est de :  $\tau w_t^i f(a_i) N_t$ , tandis que le montant perçu est :  $p_t^i f(a_i) N_{t-1}$ . Etant donné les équations (5), (8) et (10), nous obtenons que le montant de la contribution nette pour les agents de productivité  $a_i$  s'écrit :

$$CN_{a_i} = \nu A(1 - \alpha) \frac{k_t^\alpha}{\bar{a}^\alpha} N_t \left[ \left( \lambda \frac{COV_{T(a),a}}{\bar{a}} + \bar{T} \right) a_i - (\lambda a_i + (1 - \lambda) \bar{a}) T(a_i) \right] f(a_i)$$

ou bien :

$$CN_{a_i} \equiv \Psi(k, a_i) \left[ \left( \lambda \frac{COV_{T(a),a}}{\bar{a}} + \bar{T} \right) a_i - (\lambda a_i + (1 - \lambda) \bar{a}) T(a_i) \right] \quad (19)$$

On vérifie aisément qu'en intégrant ces contributions nettes on obtient bien :  $\int_{\Omega_a} CN_{a_i} f(a_i) da_i = 0$ .

Nous allons ici nous intéresser aux deux cas polaires que sont le système Bismarkien et le système Beveridgien. Ceci va nous permettre de bien mettre en évidence les propriétés

en terme de redistribution de ces systèmes souvent évoqués.

**Proposition 6 :** *Pour  $\lambda = 1$ , il existe un seuil de productivité  $\hat{a}$  en deçà (au delà) duquel les agents ont une contribution nette positive (négative).*

**Preuve :** voir Annexe E.  $\square$

Ainsi, dans un système de retraite par répartition entièrement Bismarkien, i.e. un système qui base le montant des pensions versées entièrement sur la productivité du salarié pendant sa période d'activité, alors ce système est inégalitaire en terme de contribution nette au système de retraite. Les agents dont la productivité est inférieure au seuil  $\hat{a}$  ne vivent pas assez longtemps pour pouvoir bénéficier d'une contribution nette négative.

**Corollaire 2 :** *Si tous les agents ont la même durée de vie  $T$ , alors le système Bismarkien ( $\lambda = 1$ ) est neutre en terme de contribution nette.*

**Preuve :** Dans l'Annexe E, on constate que  $CN_{a_i} = 0, \forall a_i$  si  $T(a_i) = T, \forall a_i$ .  $\square$

Ceci peut expliquer le fait que les analyses portant sur le système de retraite français, qui est Bismarkien (Casametta et al [1999]), indiquent que celui-ci est anti-redistributif (Citer des auteurs comme Barnay[?]), i.e. qu'il a plutôt tendance à favoriser les classes sociales dont le revenu est le plus fort. Mais, ceci justifie également la volonté des gouvernements de faire en sorte que la durée de vie des plus pauvres rattrape celle des plus riches, de façon à rendre neutre le système en terme de contribution nette.

**Proposition 7 :** *Pour  $\lambda = 0$ , alors si  $T(a_i)$  est de la forme :*

- $T(a_i) = \gamma a_i$  alors le système Beveridgien est neutre en terme de contribution nette.
- $T(a_i)$  a une élasticité inférieure à 1 par rapport à  $a_i$ , alors il existe un seuil  $\tilde{a}$  en-deçà (au-delà) duquel la contribution nette est négative (positive).
- $T(a_i)$  a une élasticité supérieure à 1, alors il existe un seuil  $\tilde{a}$  en-deçà (au-delà) duquel la contribution nette est positive (négative).

**Preuve :** voir Annexe F.  $\square$

Ce résultat indique que dans les deux premiers cas, les plus probables, le système Beveridgien permet d'assurer au pire une neutralité, et au mieux une redistributivité liée au

fait que la pension est la même pour tous.

Remarquons que si la durée de vie est la même pour tous les agents alors le système Beveridgien assure une redistributivité des ressources en faveur des personnes dont la productivité est inférieure à la moyenne. Ce résultat standard mérite donc d'être nuancé et doit tenir compte des inégalités de durée de vie selon la CSP.

Pour résumer, le système Bismarkien pur ( $\lambda = 1$ ) ne permet pas une redistributivité directe entre les agents de l'économie, et accentue les inégalités puisqu'il est anti-redistributif en terme de contribution au système de retraite. En revanche, le système Beveridgien ( $\lambda = 0$ ) assure une redistribution directe des revenus ou dans le pire des cas, il est neutre et n'assure aucune redistribution.

## 6 Calibration et Résultats du Modèle

Nous allons calibrer ce modèle sur données françaises. Au préalable, il est nécessaire de définir un intervalle dans lequel les productivités des agents prennent leur valeur. Cet intervalle est supposé être le suivant :  $[1, 12]$ . Il est plus important que les écarts relatifs de salaire recensés par Piketty [2002] entre le premier et le dernier décile qui est de l'ordre de 1 à 5. Ceci est dû au fait que notre intervalle est un intervalle continu et donc que les inégalités relatives aux plus grandes extrémités sont plus fortes que celles mentionnées par Piketty. Nous pourrions même penser que notre inégalité relative sous-estime la réalité.

La fonction de densité associée à ces productivités du travail doit respecter la propriété essentielle suivante (Lambert [2001], p.23) : mode < médiane < moyenne. Une façon simple de représenter ceci est d'utiliser une fonction de densité strictement décroissante en  $a_i$  et de la forme  $f(a_i) = b - ca_i$ , avec  $b, c \in \mathbb{R}$ . Ces deux paramètres doivent être tels que cette fonction de densité respecte les propriétés suivantes :  $f(a_i) > 0, \forall a_i$  ;  $\int_{\Omega_a} f(a_i) da_i = 1$  ; et l'indice de Gini doit être proche de 0.32 (Hairault et Langot [2002]).

Lambert [2001] montre que l'indice de Gini peut être calculé à partir d'une distribution de salaires comme suit :

$$G = -1 + 2 \int_{a_-}^{a_+} \frac{a_i F(a_i) f(a_i)}{\bar{a}} da_i$$

La fonction de densité suivante respecte bien ces trois propriétés :

$$f(a_i) = 0.1884 - 0.015a_i$$

De plus, cette fonction a la propriété requise selon laquelle la moyenne est supérieure à la médiane. Pour cela il suffit de montrer que :  $\int_{a_-}^{\bar{a}} f(a_i) da_i > 0.5$ .

La dernière fonction à spécifier concerne la relation entre la durée de vie et le niveau de productivité. Il faut donc savoir quel est la durée de vie d'une personne à haut salaire comparée à celle d'un agent à faible salaire. Nous faisons l'hypothèse simplificatrice par manque de données que l'espérance de vie à 35 ans des agents dont la productivité est la plus forte est la même que celle des cadres et professions libérales définie en introduction, soit 44.5 ans et que celle des agents dont la productivité est la plus faible est de 38 ans. La durée de vie de ces deux catégories d'agents est donc respectivement de 79.5 et de 73 ans. En supposant que la durée de chaque période est de 40 ans, il faut donc que cette fonction soit telle que :  $T(1)=13/40$  et que  $T(12)=19.5/40$ . Nous supposons pour simplifier que cette fonction est de la forme :  $T(a_i) = e + fa_i$ . Nous obtenons alors les valeurs suivantes pour cette fonction :  $e = 0.31025$  et  $f = 0.01475$ .

La valeur initiale de  $\lambda$  est fixée à 0.885. Cette valeur est celle donnée par Hairault et Langot [2002].

Le reste de la calibration est relativement standard. Le taux de croissance de la population est supposé être  $n = 0.3$ , ce qui correspond à un taux de croissance annuel de la population de 0.65% (Charpin [1999]). Nous fixons  $\alpha = 0.33$ , qui représente la part de la rémunération du capital dans la valeur ajoutée.

Pour la suite de cet exercice deux cas doivent être distingués. Le premier va permettre de représenter le système de retraite organisé à Générosité-Définie tandis que le second est organisé à Contribution-Définie. Dans ces deux systèmes, nous allons étudier les conséquences d'une plus grande redistributivité du système de retraite (baisse du  $\lambda$ ).

Dans le cas du système à Générosité-Définie, le taux de taxe est la variable d'ajustement pour la caisse de retraite tandis que le taux de remplacement  $\nu$  est fixé de façon exogène. Hairault et Langot [2002] estiment cette valeur à 0.757. Le tableau suivant présente les résultats du modèle pour une valeur de  $\lambda$  qui est décroissante de 0.885 à 0.285.

$\lambda$	$\tau$	$k^*$	$c_+$	$c_-$	IRC
0.885	0.2337	0.014614	0.8505	0.0731	0.0859
0.785	0.2324	0.014685	0.8519	0.0739	0.0867
0.685	0.2311	0.014757	0.8532	0.0747	0.0875
0.585	0.2298	0.014829	0.8546	0.0755	0.0883
0.485	0.2285	0.014902	0.8559	0.0763	0.0891
0.385	0.2272	0.014975	0.8573	0.0771	0.0899
0.285	0.2259	0.015048	0.8586	0.0779	0.0908

Avec IRC qui représente l'inégalité relative de consommation, i.e.  $IRC = c_-/c_+$ .

Qualitativement, nous observons bien les résultats attendus. En effet, suite à un accroissement de la redistributivité (baisse de  $\lambda$ ), le taux de taxe nécessaire au financement du système de retraite diminue, tandis que le niveau stationnaire de capital par tête et les niveaux de consommation stationnaires augmentent. L'indicateur d'IRC indique une baisse de cette inégalité de consommation.

Quantitativement, modifions la redistributivité du système de retraite, i.e. que  $\lambda$  passe de 0.885 à 0.785 et diminue donc de 11.3%. Nous obtenons alors que le taux de taxe nécessaire au financement du système de retraite baisse de 0.56%. Le niveau stationnaire de capital par tête s'accroît de 0.49%. La consommation des personnes à plus haute productivité et à plus faible productivité s'accroît respectivement de 0.16% et de 1.08%. L'IRC s'accroît de 0.92%. Dans ce cadre, nous obtenons un résultat intéressant puisqu'il signifie qu'un partage plus égalitaire du gâteau permet d'accroître la taille de celui-ci.

Regardons maintenant les résultats de notre modèle lorsque l'on se place dans un cadre où le système de retraite est organisé à Contribution-Définie. En vue de réaliser cet exercice nous fixons le taux de taxe nécessaire au financement du système de retraite ( $\tau$ ) à 0.23. Cette valeur est celle couramment obtenue dans la littérature et reste proche de nos résultats précédents. Nous allons une nouvelle fois faire évoluer la redistributivité du système de retraite et regarder les conséquences de ceci sur les variables de cette économie. Le tableau suivant résume les résultats obtenus :

$\lambda$	$\nu$	$k^*$	$c_+$	$c_-$	IRC
0.885	0.7450	0.0148256	0.85843	0.073779	0.08594
0.785	0.7492	0.0148229	0.85702	0.074332	0.08673
0.685	0.7534	0.0148203	0.85560	0.074890	0.08752
0.585	0.7577	0.0148176	0.85416	0.075455	0.08833
0.485	0.7620	0.0148148	0.85271	0.076026	0.08915
0.385	0.7663	0.0148121	0.85124	0.076603	0.08999
0.285	0.7707	0.0148093	0.84975	0.077187	0.09083

Qualitativement les résultats sont intéressants. Ils permettent de constater tout d'abord qu'un accroissement de la redistributivité permet d'augmenter le taux de remplacement du système de retraite. Cette hausse du taux de remplacement va avoir un impact négatif sur l'épargne qui ici va l'emporter sur l'effet incitation à l'épargne pour les plus riches du fait de la plus grande redistributivité. Cette baisse de l'épargne va réduire la valeur actualisée des revenus des agents les plus riches ce qui va réduire le montant de leur consommation de première période. Inversement, pour les plus pauvres l'accroissement de la redistributivité leur permet de compenser l'effet baisse des salaires et leur niveau de consommation s'accroît par conséquent. Ces deux derniers effets conduisent à une diminution des inégalités de consommation.

Quantitativement, suite à une hausse de la redistributivité, et donc à une baisse de  $\lambda$  de 11.3% (baisse de 0.885 à 0.785), le taux de remplacement du système de retraite s'accroît de 0.56% tandis que le niveau de capital par tête stationnaire diminue de 0.02%. La consommation de première période des agents dont la productivité est la plus grande baisse de 0.16%, alors que celle des agents dont la productivité est la plus faible s'accroît de 0.75%. Au final l'inégalité de consommation est plus faible puisque l'IRC s'accroît de 0.91%. Par conséquent, dans ce cas précis, il semble qu'il existe un arbitrage entre la taille du gâteau et une répartition plus égalitaire de celui-ci.

## 7 Conclusion

Nous avons montré qu'un accroissement de la redistributivité d'un système de retraite par répartition à Générosité-Définie, lorsque les agents sont hétérogènes en terme de productivité du travail et de durée de vie, pouvait avoir de nombreuses vertus. En effet, il peut permettre (i) de réduire le taux de taxe nécessaire au financement du système de retraite ; (ii) d'accroître le niveau stationnaire de capital par tête ; (iii) de réduire les inégalités de consommation ; (iv) d'accroître le niveau de consommation de tous les agents ; (v)

de réduire les inégalités de contribution à ce système. Mais nous avons également montré que ces résultats sont différents lorsque l'on considère le cas d'un système à Contribution-Définie. En effet, le niveau stationnaire de capital par tête et le niveau de consommation des plus riches sont alors tous deux des fonctions décroissantes de la redistributivité du système de retraite.

Deux limites de notre modèle peuvent être données. La première tient au fait que celui-ci n'intègre pas de décision endogène d'éducation qui est pourtant influencée par le niveau de redistributivité du système de retraite. Ceci nuancerait notre propos sur les vertus de cette redistributivité, notamment dans le cas à Générosité-Définie. La seconde concerne le temps de travail. En effet, il conviendrait de représenter le choix endogène de départ en retraite en fonction des CSP.

## 8 Bibliographie

## 9 Annexes

### Annexe A

Démonstration permettant d'obtenir la définition de  $\tau$ .

$$(1+n) \int_{\Omega_a} \tau w_{t+1}^i f(a_i) da_i = \int_{\Omega_a} p_{t+1}^i f(a_i) da_i$$

Or, nous savons que :

$$P_{t+1}^i = \nu A(1-\alpha) \frac{k_{t+1}^\alpha}{\bar{a}^\alpha} (\lambda a_i + (1-\lambda)\bar{a}) T(a_i)$$

En intégrant ceci sur l'intervalle  $\Omega_a$  nous obtenons que le membre de droite de la première équation s'écrit :

$$RHS = \nu A(1-\alpha) \frac{k_{t+1}^\alpha}{\bar{a}^\alpha} \left( \lambda \int_{\Omega_a} T(a_i) a_i f(a_i) da_i + (1-\lambda)\bar{a} \int_{\Omega_a} T(a_i) f(a_i) da_i \right)$$

L'équation (1) nous permet d'écrire que :  $\int_{\Omega_a} T(a_i) a_i f(a_i) da_i = COV_{T(a),a} + \bar{a}\bar{T}$ . De plus, nous reconnaissons la définition de la durée de vie moyenne dans le deuxième membre de la parenthèse. On obtient alors la relation suivante :

$$RHS = \nu A(1-\alpha) \frac{k_{t+1}^\alpha}{\bar{a}^\alpha} (\lambda COV_{T(a),a} + \bar{a}\bar{T})$$

Le membre de gauche de la première équation correspond au produit entre le taux de taxe  $\tau$ , le facteur de croissance de la population et le salaire moyen de celle-ci soit :

$$LHS = (1+n)\tau A(1-\alpha) k_{t+1}^\alpha \bar{a}^{1-\alpha}$$

En posant  $LHS = RHS$  on obtient la relation (10).  $\square$

### Annexe B

La fonction d'épargne des agents est donnée par l'équation (2), i.e. :

$$S_t^i = \frac{\beta T(a_i) w_t^i (1-\tau) R_{t+1} - p_{t+1}^i}{(1+\beta T(a_i)) R_{t+1}} \quad (20)$$

D'après les relations (4), (5) et (8), nous savons que :

$$\begin{aligned} R_t &= A\alpha k_t^{\alpha-1} \bar{a}^{1-\alpha} \\ w_t^i &= A(1-\alpha) \frac{k_t^\alpha}{\bar{a}^\alpha} a_i \\ p_{t+1}^i &= \nu A(1-\alpha) \frac{k_{t+1}^\alpha}{\bar{a}^\alpha} (\lambda a_i + (1-\lambda)\bar{a}) T(a_i) \end{aligned}$$

Nous avons ainsi :

$$\frac{p_{t+1}^i}{R_{t+1}} = \nu \frac{1-\alpha}{\alpha} k_{t+1} \left( \lambda \frac{a_i}{\bar{a}} + (1-\lambda) \right) T(a_i) \quad (21)$$

La fonction d'épargne peut donc s'écrire :

$$S_t^i = \frac{\beta T(a_i) A (1-\alpha) \frac{k_t^\alpha}{\bar{a}^\alpha} a_i (1-\tau) - \nu \frac{1-\alpha}{\alpha} k_{t+1} \left( \lambda \frac{a_i}{\bar{a}} + (1-\lambda) \right) T(a_i)}{1 + \beta T(a_i)} \quad (22)$$

L'équilibre sur le marché du capital s'écrit :

$$K_{t+1} = \int_{\Omega_a} S_t^i f(a_i) N_t da_i$$

soit

$$(1+n)k_{t+1} = \int_{\Omega_a} S_t^i f(a_i) da_i$$

En utilisant ceci et l'équation obtenue précédemment pour  $S_t^i$  on obtient :

$$(1+n)k_{t+1} = \beta A (1-\alpha) \frac{k_t^\alpha}{\bar{a}^\alpha} (1-\tau) \int_{\Omega_a} \frac{a_i T(a_i)}{1 + \beta T(a_i)} f(a_i) da_i - \nu \frac{1-\alpha}{\alpha} k_{t+1} \int_{\Omega_a} \frac{\left( \lambda \frac{a_i}{\bar{a}} + (1-\lambda) \right) T(a_i)}{1 + \beta T(a_i)} f(a_i) da_i \quad (23)$$

□

## Annexe C

### Pour la proposition 2 :

Au numérateur de l'équation (12), seul  $\tau$  dépend de  $\lambda$ . Or,  $\tau$  est une fonction croissante de  $\lambda$ , donc le numérateur est une fonction décroissante de  $\lambda$ . Il suffit alors de montrer que le dénominateur est une fonction croissante de  $\lambda$ . La dérivée de celui-ci par rapport à  $\lambda$  peut s'écrire :

$$\nu \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{1}{\bar{a}} \int_{\Omega_a} \frac{a_i - \bar{a}}{1 + \beta T(a_i)} T(a_i) f(a_i) da_i$$

Il suffit donc que l'intégrale soit positive. □

### Pour la proposition 2 (bis) :

Puisque  $\tau$  est fixé, seul le dénominateur de l'équation (12) dépend de  $\lambda$ . Le signe de la dérivée de  $k$  par rapport à  $\lambda$  dépend du signe de la dérivée du second membre du dénominateur. L'expression énoncée dans la proposition est alors obtenue aisément.

## Annexe D

### Preuve de la proposition 4 :

L'équation (14) peut s'écrire :

$$c_t^i = \frac{A(1-\alpha)\frac{k_i^\alpha}{a_i^\alpha}a_i(1-\tau) + \nu\frac{1-\alpha}{\alpha}k_{t+1}\left(\lambda\frac{a_i}{a} + (1-\lambda)\right)T(a_i)}{1 + \beta T(a_i)} \quad (24)$$

On évalue les écarts relatifs à l'état stationnaire. L'équation précédente peut donc s'écrire :

$$c^i = k \frac{A(1-\alpha)\frac{k^{\alpha-1}}{a^\alpha}(1-\tau)a_i + \nu\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\lambda\frac{a_i}{a} + (1-\lambda)\right)T(a_i)}{1 + \beta T(a_i)} \quad (25)$$

Le membre de gauche du numérateur peut s'écrire, compte tenu de l'équation (12) :

$$a_i \frac{1 + n + \nu\frac{1-\alpha}{\alpha} \int_{\Omega_a} \frac{\lambda\frac{a_i}{a} + (1-\lambda)}{1 + \beta T(a_i)} T(a_i) f(a_i) da_i}{\beta \int_{\Omega_a} \frac{T(a_i)a_i}{1 + \beta T(a_i)} f(a_i) da_i} \equiv a_i f(\lambda)$$

La fonction de consommation peut donc s'écrire :

$$c^i = k \frac{a_i f(\lambda) + \nu\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\lambda\frac{a_i}{a} + (1-\lambda)\right)T(a_i)}{1 + \beta T(a_i)}$$

Entre le groupe le plus favorisé et le moins favorisé le rapport des niveaux de consommation de première période s'écrit :

$$\frac{c_t^-}{c_t^+} = \frac{1 + \beta T(a_+)}{1 + \beta T(a_-)} \times \frac{a_- f(\lambda) + \nu\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\lambda\frac{a_-}{a} + (1-\lambda)\right)T(a_-)}{a_+ f(\lambda) + \nu\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\lambda\frac{a_+}{a} + (1-\lambda)\right)T(a_+)} \quad (26)$$

Afin d'obtenir le résultat de la proposition 4, il suffit de montrer que la dérivée de ce rapport relativement à  $\lambda$  est négative.

On montre aisément que ceci est vrai si et seulement si :

$$[f(\lambda) - \lambda f'(\lambda)] \left[ a_+ \left( \frac{a_-}{a} - 1 \right) T(a_-) - a_- \left( \frac{a_+}{a} - 1 \right) T(a_+) \right] < \\ f'(\lambda) [a_+ T(a_-) - a_- T(a_+)] + \nu \frac{1-\alpha}{\alpha} T(a_+) T(a_-) \left( \frac{a_+ - a_-}{a} \right)$$

Le membre de gauche de cette inéquation est composé de deux éléments. Il est évident que le deuxième est strictement négatif. Montrons que le premier élément est strictement positif. Pour cela, il suffit de montrer que  $1 > \lambda \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)}$  avec :

$$f(\lambda) = \frac{1 + n + \nu\frac{1-\alpha}{\alpha} \int_{\Omega_a} \frac{\lambda\frac{a_i}{a} + (1-\lambda)}{1 + \beta T(a_i)} T(a_i) f(a_i) da_i}{\beta \int_{\Omega_a} \frac{T(a_i)a_i}{1 + \beta T(a_i)} f(a_i) da_i}$$

On montre aisément que ceci est toujours vrai. Puisque le membre de gauche est strictement négatif, il suffit de montrer que le membre de droite est strictement positif. Avec  $f'(\lambda) > 0$ , il suffit que la condition donnée dans la proposition soit vraie.  $\square$

**Preuve de la proposition 4 (bis) :**

Le rapport des consommations s'écrit :

$$\frac{c_t^-}{c_t^+} = \frac{1 + \beta T(a_+)}{1 + \beta T(a_-)} \times \frac{A(1 - \alpha) \frac{k^{\alpha-1}}{\bar{a}^\alpha} (1 - \tau) a_- + \nu \frac{1-\alpha}{\alpha} \left( \lambda \frac{a_-}{\bar{a}} + (1 - \lambda) \right) T(a_-)}{A(1 - \alpha) \frac{k^{\alpha-1}}{\bar{a}^\alpha} (1 - \tau) a_+ + \nu \frac{1-\alpha}{\alpha} \left( \lambda \frac{a_+}{\bar{a}} + (1 - \lambda) \right) T(a_+)} \quad (27)$$

En dérivant ceci par rapport à  $\lambda$ , on trouve que le signe de ce rapport dépend du signe de l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1-\alpha}{\alpha} c \left[ (\alpha - 1) k^{\alpha-2} \frac{dk}{d\lambda} - \frac{d\nu}{d\lambda} k^{\alpha-1} \right] & \left[ a_- T(a_+) \left( \lambda \frac{a_+}{\bar{a}} + 1 - \lambda \right) - a_+ T(a_-) \left( \lambda \frac{a_-}{\bar{a}} + 1 - \lambda \right) \right] \\ & + \frac{1-\alpha}{\alpha} c k^{\alpha-1} \left[ a_+ T(a_-) \left( \frac{a_-}{\bar{a}} - 1 \right) - a_- T(a_+) \left( \frac{a_+}{\bar{a}} - 1 \right) \right] \\ & + \nu \frac{1-\alpha}{\alpha} T(a_-) T(a_+) \left( \frac{a_- - a_+}{\bar{a}} \right) \end{aligned}$$

Avec  $c = A(1 - \alpha) \frac{1-\tau}{\bar{a}^\alpha} > 0$ .

On constate que les deuxième et troisième termes sont tous deux strictement négatifs. Il suffit donc de montrer que le premier l'est également. Si  $k$  est une fonction décroissante de  $\lambda$ , et puisque  $\nu$  est une fonction décroissante de ce même paramètre, il suffit que le membre entre parenthèses soit strictement négatif. Ceci correspond à la condition de la proposition.  $\square$

**Annexe E**

Pour  $\lambda = 1$ , on remarque que  $CN_{a_-} = \Psi(k, a_i) a_- \left[ \left( \frac{COV_{T(a),a}}{\bar{a}} + \bar{T} \right) - T(a_-) \right]$ . Le signe de ceci est positif. Puisque le membre dans la parenthèse est une fonction décroissante de  $a_i$ , il nous suffit de montrer que le signe de ceci est négatif en  $a_+$ . En effet, si  $T(a_+) < \left( \frac{COV_{T(a),a}}{\bar{a}} + \bar{T} \right)$ , alors cela implique que  $T(a_i) < \left( \frac{COV_{T(a),a}}{\bar{a}} + \bar{T} \right)$ ,  $\forall a_i$ . En multipliant les deux membre par  $a_i f(a_i)$  et en intégrant sur  $a_i$ , on trouve que  $\int_{\Omega_a} T(a_i) a_i f(a_i) da_i < COV_{T(a),a} + \bar{T} \bar{a}$ , ce qui est impossible puisque cela correspond à la définition de la covariance. Nous avons donc  $T(a_+) > \left( \frac{COV_{T(a),a}}{\bar{a}} + \bar{T} \right)$ , et il existe une valeur seuil  $\hat{a}$  au-delà de laquelle cette inégalité est respectée.  $\square$

**Annexe F**

Pour  $\lambda = 0$ , la contribution nette de chaque groupe d'agent est donnée par :

$$CN_{a_i} = \Psi(k, a_i) [\bar{T} a_i - \bar{a} T(a_i)]$$

En intégrant ceci sur l'intervalle  $\Omega_a$  on trouve bien que la somme des contributions nettes doit être nulle.

(i) Si  $T(a_i) = \gamma a_i$ , alors on trouve que  $\bar{T} = \int_{\Omega_a} \gamma a_i f(a_i) da_i = \gamma \bar{a}$ . On obtient alors de façon évidente que  $CN_{a_i} = 0, \forall a_i$ .

(ii) Si  $E_{T(a)/a} < 1$ . Nous savons que  $CN_{a_i} < 0$  si et seulement si  $\frac{\bar{T}}{\bar{a}} < \frac{T(a_i)}{a_i}$ . Le cas  $E_{T(a)/a} < 1$  implique que le membre de droite est une fonction décroissante de  $a_i$ . Compte tenu du fait que la somme des contributions nettes doit être nulle, ceci implique qu'il existe un seuil  $\tilde{a}$  en-deçà (au-delà) duquel la contribution nette de chaque agent est négative (positive).

(iii) Si  $E_{T(a)/a} > 1$ . Le raisonnement est le même que précédemment mais puisque le membre de droite est croissant cela implique qu'il existe un seuil  $\check{a}$  en-deçà (au-delà) duquel la contribution nette de chaque agent est positive (négative).  $\square$

## Annexe G

### Preuve de la proposition 5 :

En regardant l'équation précédente définissant  $c^i$ , on constate que  $\text{signe} \left( \frac{dc^i}{d\lambda} \right) = \text{signe} \left( \frac{dNum}{d\lambda} \right)$ , avec  $Num$  qui représente le numérateur. Ceci implique que :

$$\frac{dNum}{d\lambda} = a_i A \frac{1-\alpha}{\bar{a}^\alpha} \left( \alpha k^{\alpha-1} \frac{dk}{d\lambda} (1-\tau) - \frac{d\tau}{d\lambda} k^\alpha \right) + \nu \frac{1-\alpha}{\alpha} T(a_i) \left[ \left( \lambda \frac{a_i}{\bar{a}} + 1 - \lambda \right) \frac{dk}{d\lambda} + k \left( \frac{a_i}{\bar{a}} - 1 \right) \right]$$

Aux propositions 1 et 2, nous avons montré que  $\tau$  et  $k$  étaient respectivement des fonctions croissantes et décroissantes de  $\lambda$ . Le membre de gauche est par conséquent strictement négatif. L'impact d'une hausse de  $\lambda$  est strictement négatif pour tous les agents si, et c'est une condition suffisante :

$$\frac{\frac{dk}{d\lambda}}{k} \leq \frac{1 - \frac{a_i}{\bar{a}}}{\lambda \frac{a_i}{\bar{a}} + 1 - \lambda} \quad \square$$

### Preuve de la proposition 5 (bis) :

Il suffit de calculer la dérivée :  $\frac{dc^i}{d\lambda}$ . La condition obtenue est alors une condition suffisante pour obtenir le résultat présenté.  $\square$