Irréversibilités et Incertitude totale

Tania Bouglet[1], Jean-Christophe Vergnaud[2]

2002

[1]EUREQua-Université Paris1, 106-112, Bld de l'Hôpital, Paris 75647, Cedex 13, France. bouglet@univ-paris1.fr

[2]EUREQua-CNRS, Tel : 33 1 44 07 82 29 ; e-mail : vergnaud@univ-paris1.fr

Remerciements : *Nous remercions Michèle Cohen, Jean-Max Koskievic, Gilles Rotillon, Jean-Marc Tallon et David Ulph pour leurs précieux commentaires ainsi que les participants de FUR IX (1999), JMA XVII, Journées Economie de l'Environnemenent (Piree), ESEM (2000).*

Abstract

L'objectif de cet article est de reconsidérer la théorie des irréversibilités décisionnelles dans un cadre non-Bayésien. Nous proposons tout d'abord une typologie de trois effets permettant de distinguer les rôles respectifs des irréversibilités et de l'information et de pallier ainsi à une certaine confusion entretenue par la définition classique de "l'effet irréversibilité" proposée par Arrow et Fisher **?** et Henry **?**. L'agent fait face à une situation d'incertitude totale et recourt au critère du Max-min. Nous considérons deux types de modèle. Le premier ne traite que des irréversibilités décisionnelles alors que le second intègre l'existence d'externalités intertemporelles. Nous retrouvons dans ce cadre non-Bayésien des résultats qualitatifs équivalents à ceux trouvés dans la littérature. On constate par contre des différences quantitatives importantes. D'une part, un agent recourant au critère Max-min ne prend pas des décisions nécessairement plus précautionneuses qu'un agent Bayésien. D'autre part, le cas Max-min n'est pas réductible à un traitement Bayésien.

Mots-clés : irréversibilité, incertitude, critère Max-min

Classification JEL : D81-D83-Q20

Abstract

In this paper, we reconsider the irreversibility theory in a non-bayesian framework. First, we propose three definitions in order to make the difference between the effects of the irreversibilities and of the information which were mixed in the standard definition of the "*irreversibility effect*" proposed by Arrow & Fisher **?** and Henry **?**. The agent faces total uncertainty and uses the Max-min criterion. We consider two types of model. The former deals only with decisional irreversibilities while the latter considers also accumulation process. Our qualitative results are similar to the ones in the litterature. Yet, we notice important quantitative differences. The Max-min criterion does not lead necessarly to more cautious decisions than the Expected utility criterion. Moreover there is no probability distributions that could produce the Max-min decisions.

Key words : irreversibilities, uncertainty, Max-min criterion

JEL Classification : D81-D83-Q20

1 Introduction

Dans cet article, nous réexaminons les modèles de choix dans l'incertain avec irréversibilités décisionnelles. Le premier apport de ce travail est de traiter ces modèles dans une situation d'incertitude totale, c'est à dire lorsqu'on a aucune information sur les probabilités des événements alors qu'il est traditionnel dans la littérature de se placer dans un cadre Bayésien. Le second apport de ce travail est de modifier l'exercice de statique comparative qui est en général étudié dans cette littérature de façon à identifier de manière plus claire les différents effets en jeu.

Rappelons tout d'abord la motivation de ces modèles. Cette littérature sur les irréversibilités initiées par Arrow-Fisher **?** et d'Henry **?** avait pour but initialement de proposer un fondement à la notion de valeur d'option ce qui a conduit à caractériser une notion de quasi-valeur d'option. A titre d'exemple, préserver un actif naturel, c'est faire le choix d'une décision flexible qui préserve un plus grand éventail de choix possibles dans le futur et qui permet de s'adapter aux informations à venir. La valeur d'une décision flexible est d'autant plus forte que l'on s'attend à obtenir des information supplémentaires.

Ces dernières années, ce cadre d'analyse a été repris pour l'étude du Principe de Précaution. Il est en effet tentant, tant l'énoncé de ce principe semble s'y prêter, de proposer une analyse du Principe de Précaution à travers le prisme de cette formalisation. Rappelons, pour fixer les idées, une citation bien connue de la loi Barnier (1985)

"l'absence de certitudes, compte tenu des connaissances scientifiques et techniques du moment, ne doit pas retarder l'adoption de mesures effectives et proportionnées visant à prévenir un risque de dommages graves et irréversibles à l'environnement à un coût économiquement acceptable".

De nombreux travaux ont tenté de donner un contenu rationnel et opérationnel à ce principe (Chevé-Congar**?**, Henry-Henry**?**...) et plus particulièrement Kolstad**?**, Ulph-Ulph **?** et Gollier-Jullien-Treich**?** se sont concentrés sur le rôle crucial joué par l'attente d'une arrivée future d'information. On peut lire en effet à rebours le principe et chercher pour le justifier, à montrer que l'attente de progrès scientifique ne doit pas conduire au report de mesures de précaution. Aussi ses travaux ont reconsidéré les modèles d'irréversibilités décisionnelles en modifiant la forme de la fonction objectif pour tenir compte de phénomènes environnementaux tel que le réchauffement climatique.

La quasi totalité de ces travaux se placent dans une situation Bayésienne. Il est naturel de réexaminer ces modèles dans un cadre non probabilisé étant donné le type d'incertitude scientifique à laquelle on fait face. En effet, dans le débat public autour du Principe de Précaution, il est souvent mis en avant que ce qui fait la spécificité des incertitudes scientifiques est l'absence de probabilités (cf rapport Kourilsky-Viney[1]), soit qu'elles ne soient pas connues car on ne dispose pas de fréquences observées ou estimées, soit qu'il n'y a tout simplement pas de sens à parler de probabilités objectives lorsque l'incertitude correspond à des théories en concurrence[2]. On ne peut parler de probabilités que dans le sens de probabilités subjectives du décideur public. Or pour le décideur public, se former des probabilités subjectives à partir des opinions d'experts

[1] KOURILSKY, VINEY (2000): *Le Principe de précaution.* Rapport au premier ministre, Paris, éd. Odile Jacob.

[2] Il est absurde de parler de fréquence avec laquelle une théorie pourrait être vraie.

scientifiques n'est peut être pas simple. Une solution souvent évoquée est de recourir au critère du Maxmin (Rapport Dron-Cohen de Lara, Documentation française). Il consiste à faire au mieux en se plaçant dans la situation la moins favorable. C'est à ce critère que nous recourons dans ce travail.

Clarifier une certaine confusion qui nous semble présente dans cette littérature est le second point auquel nous nous attachons. En effet, les modèles les plus récents en cherchant à étendre les modèles originaux, ont introduit la notion de décision "précautionneuse" sans l'expliciter précisément et sans la caractériser par rapport à la notion originale de décision "flexible". Le choix de ces travaux d'interpréter le Principe de Précaution comme énonçant qu'en présence d'incertitude scientifique sur la réalité d'un danger, il faut agir "précautionneusement précocement" et non pas attendre "d'apprendre avant d'agir", conduit à étudier l'effet de l'arrivée d'information sur les décisions prises. La formalisation adoptée est celle d'un problème de décision séquentiel, comportant deux périodes, entre lesquelles il y a révélation d'information. Il s'agit alors d'étudier l'effet de l'information sur la décision optimale de première période. Plus d'information conduit-il à prendre des décisions plus précautionneuses en première période? Une réponse positive constituerait une justification normative du Principe de Précaution.

Dans les modèles d'Arrow-Fisher **?**, Henry **?**, Freixas-Laffont**?**)...est démontrée l'existence de "l'effet irréversibilité" (*à une structure d'information plus fine doit être associée une décision optimale plus flexible)* et de son pendant, la quasi-valeur d'option positive. Ce résultat ne dit rien en matière de "précaution". Les travaux théoriques plus récents (Kolstad**?**, Ulph-Ulph**?**, Gollier-Jullien-Treich**?**) qui se sont inspirés du problème des gaz à effet de serre étudient les décisions en matière d'émissions de gaz à effet de serre aujourd'hui. Sans être défini clairement est introduit la précaution de manière intuitive : réduire les émissions, c'est limiter l'ampleur du réchauffement climatique si le lien entre gaz à effet de serre et climat existe. La dimension flexibilité reste présente : réduire les émissions, c'est augmenter les possibilités de choix du niveau futur du stock de gaz à effet de serre présents dans l'atmosphère[3]. Réduire les émissions aujourd'hui c'est s'offrir à la fois de la flexibilité et de la précaution. Or, dans ces modèles traitant du réchauffement climatique, l'effet de l'information ne peut être déterminé sans équivoque[4]. D'où l'impression que "l'effet irréversibilité" démontré dans les modèles fondateurs n'était plus nécessairement vérifié dans des modèles plus complexes.

En fait, ces résultats ne sont pas liés à la présence d'irréversibilités : sans contrainte d'irréversibilité[5] on retrouve la même ambiguïté. La clarification que nous proposons est d'isoler les effets induit par la présence d'irréversibilités de ceux produit par d'autres élements : information, précaution. Ceci nous conduit à proposer une caractérisation formelle de la précaution de façon à la distinguer de la flexibilité. Même si dans les situations considérées en général dans la littérature, précaution et flexibilité semblent aller de pair, on peut fort bien imaginer que flexibilité et précaution puissent

[3]Cette dimension de flexibilité provient de l'impossibilité de déstocker. Cette contrainte d'irréversibilité serait relâcher si les recherches sur les puits de carbone débouchaient sur des techniques efficaces de stockage.

[4]Dans certains cas particuliers, Gollier et alii **?** exhibent des conditions nécessaires et suffisantes qui permettent de lever cette ambiguïté. Ils expliquent l'ambiguté des résultats par la présence de deux effets contradictoires ¨: un effet de précaution qui est contrarié par un effet richesse (plus d'information augmente le bien être futur et pousse à émettre plus aujourd'hui).

[5]C'est à dire si l'on envisage que l'on puisse destocker en seconde période.

être antinomyques. Par exemple, en stoppant précautionneusement l'énergie nucléaire on se prive peut-être d'innovation future dans ce domaine. Nous distinguons alors tout d'abord un *effet irréversibilité pur* qui traduit le fait que la présence d'irréversibilité induit des décisions plus flexibles. Ensuite, en l'absence de contrainte d'irréversibilité, nous définissons un *effet informationnel pur* qui traduit le fait qu'une information plus précise conduit à prendre des décisions plus précautionneuses. Enfin nous considérons un *effet irréversibilité informationnel* qui traduit le rôle de l'irréversibilité par rapport à celui de l'information dans le sens suivant : nous disons qu'il existe un *effet irréversibilité informationnel* si lorsqu'il existe un *effet informationnel pur*, en présence d'une contrainte d'irréversibilité, une information plus précise conduit à prendre des décisions plus flexibles. Nous montrons que l'*effet irréversibilité pur* est toujours présent, que l'*effet informationnel pur* n'est pas toujours avéré mais que lorsqu'il est présent, l'*effet irréversibilité informationnel* existe toujours.

L'article est alors organisé comme suit. Dans la section 2, nous présentons une fonction d'utilité dont nous montrons qu'elle généralise quelques unes des formes étudiées dans la littérature générale et nous introduisons ensuite le critère Maxmin appliqué dans ce problème de décision séquentiel. Nous concluons cette section par la typologie que nous proposons. Dans la section 3, nous énonçons les résultats principaux et nous montrons que ces résultats étendent les résultats de la littérature au cadre non-Bayésien. Ces résultats permettent aussi de faire apparaître l'existence d'un effet irréversibilité informationnel. Dans la section 4, nous étudions plus précisément si une situation d'incertitude totale conduit à prendre des décisions plus flexibles ou plus précautionneuses que dans une situation probabilisée. Il s'avère notamment que le critère Max-min n'induit pas nécessairement des choix plus flexibles. La section 5 conclut le papier. Pour des raisons de clarté, les développements techniques, longs du fait que le critère max-min introduit des points de non-différenciabilité, sont reportés en annexe.

2 Modèle

Le modèle général que nous proposons est simplifié au maximum afin de faire apparaître de la manière la plus évidente possible les différences de résultats entre notre approche et une approche Bayésienne.

2.1 La fonction objectif, hypothèses et liens avec la littérature

Nous considérons un problème de décision séquentielle à deux périodes. La fonction d'utilité intertemporelle est de la forme suivante:

$$U_1(c_1) + U_2(c_2) + V(s, \theta) \text{ avec } s = \delta c_1 + c_2$$

où $c_1 \geq 0$ est la décision de première période, c_2 celle de seconde période, $\delta \geq 0$ et θ l'état du monde. U_1 et U_2 sont les fonctions qui représentent l'utilité retirée directement des décisions de chaque période et V est une fonction d'utilité liée à un stock et qui sera obtenue en seconde période. L'interprétation des variables c_1 et c_2 dépend du contexte, δ est un taux de survie.

Comme nous le verrons plus loin, cette forme fonctionnelle permet d'englober différents modèles de la littérature sur les irréversibilités.

Nous formalisons les caractéristiques du problème de la manière suivante.

1. *L'incertitude:*

   Nous supposons que l'ensemble des états du monde Ω est réduit à 2 états du monde $\{\theta_1, \theta_2\}$ et que l'agent est dans une situation d'incertitude totale, c'est à dire qu'il juge possible toutes les distributions de probabilité. Dans la section 3, nous comparerons les résultats obtenus avec le cas Bayésien où l'agent serait doté en première période de croyances probabilisées $(p,\, 1-p)$ sur Ω.

2. *L'information:*

   Nous considérerons deux structures d'information pour la statique comparative: l'information parfaite, i.e l'agent apprend quel est le vrai état du monde avant de réaliser son choix de seconde période et le cas de l'absence totale d'information où l'agent ne reçoit aucune nouvelle information entre la première et la seconde période.

3. *L'irréversibilité:*

   Nous serons amenés à considérer également deux problèmes de décision : un problème de décision avec irréversibilité et un problème de décision sans irréversibilité. Nous dirons qu'un problème de décision est irréversible s'il existe une (ou des) décision(s) de première période c_1 qui restreint (restreignent) l'ensemble des choix futurs disponibles[6]. L'irréversibilité que nous considérons est donc une irréversibilité forte. Elle exprime une impossibilité de retour en arrière. Elle se traduit dans notre modèle par une contrainte sur c_2, à savoir $c_2 \geq 0$. On parlera de contrainte d'irréversibilité. On comparera les décisions initiales de la manière suivante. Dans un problème avec irréversibilité, on dira qu'une décision c_1 est plus *irréversible* qu'une décision c_1' si elle restreint davantage l'ensemble des choix possibles de seconde période. Cela se traduit dans notre modélisation par $c_1 > c_1'$. Si on considère l'exemple de l'effet de serre, un niveau d'émission de CO_2 plus important correspond à une décision plus irréversible.

   En couplant les différentes alternatives possibles en matière d'information et d'irréversibilité, l'agent sera confronté à l'un des quatre problèmes de décision séquentielle suivants selon la structure d'information et l'irréversibilité ou non du problème :

   - absence d'information et irréversibilité,

   - information parfaite et irréversibilité,

   - absence d'information et absence d'irréversibilité,

   - information parfaite et absence d'irréversibilité.

4. *La précaution :*

   Indépendamment de la qualification d'une décision en terme d'irréversibilité, on peut notamment, dans un problème sans contrainte d'irréversibilité, introduire une comparaison des décisions en terme de précaution. La définition que nous retenons traduit l'idée qu'une décision est précautionneuse si elle ne réduit pas

[6] Prenons un exemple.Considérons un ensemble de choix initial réduit à deux décisions possibles : la préservation ou non d'un bien environnemental. Si la décision initiale est de préserver le bien alors en seconde période l'ensemble de choix sera inchangé. Par contre, si la décision initiale est de ne pas préserver le bien alors en seconde période, le décideur sera contraint à prendre la même décision.

le niveau de bien-être futur et formellement nous dirons que c_1 est plus *précautionneuse* que la décision c_1' si

$$\forall \theta_i, \underset{c_2}{Max} U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta_i) \geq \underset{c_2}{Max} U_2(c_2) + V(\delta c_1' + c_2, \theta_i)$$

La forme retenue pour la fonction d'utilité généralise un certain nombre de modèles classiques.

Par exemple, pour les irréversibilités décisionnelles dans le choix du niveau de développement (ou le degré de préservation d'un bien environnemental), les auteurs (Arrow-Fisher[7]**?**, Henry**?**, Freixas-Laffont **?**) utilisaient des fonctions d'utilité intertemporelle de la forme

$$V_1(x) + V_2(y, \theta)$$

avec la contrainte d'irréversibilité $y \geq x$. La variable x est interprétée comme le niveau de développement atteint en première période, y le niveau de développement en deuxième période, la contrainte d'irréversibilité reflète l'impossibilité d'un retour en arrière et θ l'incertitude sur la rentabilité du projet de développement. En posant, $c_1 = x$ et $c_2 = y - x$, on est ramené à la forme $V_1(c_1) + V_2(c_1 + c_2, \theta)$ avec la contrainte d'irréversibilité $c_2 \geq 0$ qui est bien un cas particulier de la forme que nous examinons, c_1 et c_2 sont alors le développement entrepris à chaque période. On peut remarquer que dans ce modèle, l'aspect "précaution" est inexistant au sens de la définition que nous avons proposée : toutes les décisions c_1 sont également précautionneuse[8].

Parmi les modèles traitant des émissions de gaz à effet de serre, Ulph et Ulph **?** utilisent la forme simple :

$$U_1(c_1) + U_2(c_2) - \theta D(\delta c_1 + c_2)$$

avec les contraintes $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$. c_1 et c_2 représentent les émissions de CO_2 pour la première période et la deuxième période. δ est le taux de survie de carbone d'une période à l'autre. $D(\delta c_1 + c_2)$ fonction croissante, représente le dommage du aux émissions de CO_2 et est supposée croissante et convexe. L'incertitude porte uniquement sur l'intensité θ du dommage. La forme de la fonction objectif retenue par ces auteurs est clairement un cas particulier de la fonctionnelle que nous considérons.

Quant à eux, Gollier et alii **?** recourent à la forme :

$$U_1(c_1) + U_2(c_2 - \theta(\delta c_1 + c_2))$$

avec les contraintes $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$ (c_1 et c_2 sont les émissions de CO_2) et θ est la variable aléatoire représentant la conséquence de ces émissions. Cette fonctionnelle échappe à notre généralisation.

Pour ces deux fonctions d'utilité, on peut démontrer qu'une décision c_1 est plus *précautionneuse* que c_1' ssi $c_1 \geq c_1'$: les notions de précaution et d'irréversibilité coïncident ce qui dans le cadre du réchauffement climatique paraît naturel.

Pour la forme fonctionnelle que nous étudions, $U_1(c_1) + U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta)$, nous faisons les hypothèses suivantes.

[7] Le modèle d'Arrow-Fisher est spécifique car ils font l'hypothèse de séparabilité intertemporelle des variables de choix et les fonctions sont linéaires.

[8] En l'absence de la contrainte d'irréversibilité, on peut toujours trivialement obtenir le maximum de $V_2(c_1 + c_2, \theta)$.

Hypothèse 1 *Les fonctions U_1, U_2 et V sont strictement concaves et deux fois différentiables.*

Avec la concavité, nous reprenons une hypothèse standard faite dans ces modèles et la stricte concavité nous permet de garantir l'unicité des solutions ce qui nous simplifie notre analyse.

Hypothèse 2 $\forall\theta_i$ $Arg\max_{c_1,c_2} U_1(c_1) + U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta_i)$ *sont finies et* $\forall\theta_i, \forall c_1$ $Arg\max_{c_2} U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta_i)$ *est finie.*

Cette hypothèse est elle aussi standard.

Notons que nous ne faisons aucune hypothèse sur le sens de variation des fonctions U_1, U_2 et V et notamment que nous ne supposons aucunement la décroissance de V. Notons également que ces hypothèses ne suffisent par pour qu'une décision c_1 est plus *précautionneuse* que c_1' ssi $c_1 \geq c_1'$, et par conséquent il n'y a pas a priori de coïncidence entre l'ordre "moins irréversible" et l'ordre "plus précautionneux". Toutefois, le lemme ci-dessous décrit les situations possible pour l'ordre "plus précautionneux".

Lemme 1 *Sous les hypothèses 1 et 2, une et une seules des quatre situations mutuellement exclusives suivantes est possible*

(1) $\forall c_1, c_1'$, une décision c_1 est plus précautionneuse que c_1' ssi $c_1 \leq c_1'$,

(2) $\forall c_1, c_1'$, une décision c_1 est plus précautionneuse que c_1' ssi $c_1 \geq c_1'$,

(3) il existe $\underline{c_1}$ et $\overline{c_1}$ tel que

- $\underline{c_1} \leq \overline{c_1}$,

-$\forall c_1, c_1'$ si $c_1, c_1' \leq \underline{c_1}$ alors une décision c_1 est plus précautionneuse que c_1' ssi $c_1 \geq c_1'$

-$\forall c_1, c_1'$ si $c_1, c_1' \geq \overline{c_1}$ alors une décision c_1 est plus précautionneuse que c_1' ssi $c_1 \geq c_1'$.

(4) il existe c_1^*, tel que au moins l'une des possibilités suivantes est vérifiée :

-$\forall c_1, c_1'$ si $c_1, c_1' \leq c_1^*$, la décision c_1 n'est pas comparable avec la décision c_1' en terme de précaution,

-$\forall c_1, c_1'$ si $c_1, c_1' \geq c_1^*$, la décision c_1 n'est pas comparable avec la décision c_1' en terme de précaution.

Preuve. Toutes les preuves sont données en annexe ■

Cette caractérisation s'explique ainsi. Nous verrons plus loin en annexe que la fonction valeur

$$J^F(c_1, \theta_i) = \underset{c_2}{Max} U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta_i)$$

est telle que sa dérivée $\frac{dJ^F(c_1,\theta_i)}{dc_1}$ est une fonction décroissante qui s'exprime en fonction de $V'(., \theta_i)$. Si pour $\theta_i = \theta_1, \theta_2$, la fonction $V(s, \theta_i)$ est toujours décroissante, ce qui est le cas du modèle de Ulph et Ulph**?**, alors on est dans le cas 1 du lemme 1. Si comme dans les modèles d'irréversibilité décisionnelle, la fonction $V(s, \theta_i)$ présente un maximum, alors on est dans le cas 3 du lemme 1. Les deux autres situations sont théoriquement possible mais semblent peu pertinentes d'un point de vue environnemental. Le cas 2 correspond à des fonctions $V(s, \theta_i)$ toujours croissantes. Le cas 4 se produit par exemple quand l'une des fonctions $V(s, \theta_i)$ est toujours décroissante et l'autre toujours croissante : dans ce cas on ne peut faire aucune comparaison en terme de précaution.

2.2 Application du critère Max-min

Initialement, l'agent est dans une situation d'incertitude totale. Nous supposons alors qu'il évalue les options possibles selon le critère Max-min. Nous décrivons également le problème de décision séquentiel tel qu'il serait traité par un agent Bayésien. Nous considérons chacune des situations.

- *Absence d'information et présence d'irréversibilité.*

- Critère Maxmin

Pour son choix de seconde période, l'agent ne dispose d'aucune information supplémentaire et son choix optimal revient à $\underset{c_2 \geq 0}{Max}\{\underset{\theta_i}{Min}\{U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta_i)\}\}$. Au total, son objectif de maximisation de son utilité intertemporelle le conduit à choisir et à évaluer son plan optimal de la manière suivante :

$$\underset{c_1 \geq 0}{Max}\{U_1(c_1) + \underset{c_2 \geq 0}{Max}\{\underset{\theta_i}{Min}\{U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta_i)\}\}\}$$

- Dans un cadre Bayésien où l'agent disposerait de croyances probabilisées $(p, 1-p)$ sur $\{\theta_1, \theta_2\}$, le problème de maximisation serait :

$$\underset{c_1 \geq 0}{Max}\{U_1(c_1) + \underset{c_2 \geq 0}{Max}\{U_2(c_2) + pV(\delta c_1 + c_2, \theta_1) + (1-p)V(\delta c_1 + c_2, \theta_2)\}\}$$

- *Information parfaite et présence d'irréversibilité.*

- Critère Maxmin

En deuxième période, l'agent sait quel est le vrai état du monde θ_i et son choix optimal sera alors de maximiser $\underset{c_2 \geq 0}{Max}\{U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta_i)\}$. Anticipant son choix optimal de seconde période mais étant totalement incertain sur l'information qu'il recevra, il évalue ex ante la valeur de son choix de seconde période par

$$\underset{\theta_i}{Min}\{\underset{c_2 \geq 0}{Max}\{U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta_i)\}\}$$

Au total, son objectif de maximisation de son utilité intertemporelle le conduit à choisir et à évaluer son plan optimal ainsi :

$$\underset{c_1 \geq 0}{Max}\{U_1(c_1) + \underset{\theta_i}{Min}\{\underset{c_2 \geq 0}{Max}\{U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta_i)\}\}\}$$

- Dans un cadre Bayésien, on aurait :

$$\underset{c_1 \geq 0}{Max}\{U_1(c_1) +$$
$$\{p\underset{c_2 \geq 0}{Max}\left(U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta_i)\right) + (1-p)\underset{c_2 \geq 0}{Max}\left(U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta_i)\right)\}\}$$

- *Absence d'information et absence d'irréversibilité.*

- Critère Maxmin

Le critère de décision et d'évaluation est identique au premier cas excepté qu'il n'y a plus désormais de contrainte d'irréversibilité $c_2 \geq 0$. D'où le critère

$$\underset{c_1 \geq 0}{Max}\{U_1(c_1) + \underset{c_2}{Max}\{\underset{\theta_i}{Min}\{U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta_i)\}\}\}$$

- Dans un cadre Bayésien :

$$\underset{c_1 \geq 0}{Max}\{U_1(c_1) + \underset{c_2}{Max}\{U_2(c_2) + pV(\delta c_1 + c_2, \theta_1) + (1-p)V(\delta c_1 + c_2, \theta_2)\}\}$$

- *Information parfaite et absence d'irréversibilité*

- Critère Maxmin

Par rapport à la seconde situation, la seule différence est aussi l'absence de contrainte d'irréversibilité, d'où :

$$\underset{c_1 \geq 0}{Max}\{U_1(c_1) + \underset{\theta_i}{Min}\{\underset{c_2}{Max}\{U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta_i)\}\}\}$$

- Dans un cadre Bayésien :

$$\begin{aligned}&\underset{c_1 \geq 0}{Max}\{U_1(c_1) + \\ &\{p\underset{c_2}{Max}\,(U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta_1)) + (1-p)\underset{c_2}{Max}\,(U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta_2))\}\}\end{aligned}$$

Remarque 1 *Le traitement que nous venons de proposer est la simple application des techniques de l'optimisation dynamique. Dans la littérature (voir par exemple Epstein et Le Breton ?), s'est développée une importante discussion sur l'incohérence dynamique des modèles non Bayésien, incohérence dynamique qui rendrait problématique le recours à au technique de l'optimisation dynamique. Toutefois, pour le critère Maxmin il n'existe pas de tel problème d'incohérence dynamique ce qui permet d'appliquer les techniques usuelles de traitement par implémentation arrière. On peut vérifier notamment que traiter, comme nous le faisons, les arbres de décision par implémentation arrière ou le traiter en mettant ces arbres sous forme stratégique et en recherchant les stratégies optimales conduit aux mêmes choix optimaux et à la même évaluation. C'est par exemple le cas en information parfaite et présence d'irréversibilité. On peut vérifier que :*

$$\begin{aligned}&\underset{c_1 \geq 0}{Max}\{U_1(c_1) + \underset{\theta_i}{Min}\{\underset{c_2 \geq 0}{Max}\{U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta_i)\}\}\} \\ = &\underset{c_1 \geq 0,\, c_{2i} \geq 0}{Max}\{\underset{\theta_i}{Min}\{U_1(c_1) + U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta_i)\}\}\end{aligned}$$

Le second terme représente le critère de décision pour traiter le problème sous forme stratégique et le premier correspond à la résolution par implémentation arrière.

2.3 Qu'est ce que l'effet irréversibilité?

La définition de l'effet irréversibilité introduite originellement dans le cadre des problèmes d'irréversibilité décisionnelle nous semble inadéquate dans un cadre plus général. Aussi, introduisons-nous une typologie différente. Notons $c_1^{I,AI}, c_1^{F,AI}$ respectivement les décisions optimales de première période avec irréversibilité (I) et sans irréversibilité (F), en absence d'information (AI). Notons $c_1^{I,IP}$, $c_1^{F,IP}$ respectivement les décisions optimales de première période avec irréversibilité et sans irréversibilité, en information parfaite (IP).

La définition standard de l'effet irréversibilité qui énonce :

"à une structure d'information plus fine, doit être associée une décision initiale moins irréversible",

repose donc sur la comparaison de $c_1^{I,AI}$ et $c_1^{I,IP}$, c'est à dire sur l'effet d'un affinement de la structure d'information lorsqu'il y a une contrainte d'irréversibilité. Dans les problèmes d'irréversibilité décisionnelle, sous des hypothèses standard sur la forme des fonctions d'utilité et dans un cadre Bayésien l'effet irréversibilité est bien vérifié, c'est-à-dire $c_1^{I,IP} \leq c_1^{I,AI}$, autrement dit une amélioration de l'information attendue se traduit par une décision plus flexible en première période. Dans ces modèles, la présence d'une contrainte d'irréversibilité est essentiel puisque sans cette contrainte, on a $c_1^{F,AI} = c_1^{F,IP}$.

L'introduction des externalités intertemporelles rend les choses plus confuses car l'inégalité $c_1^{I,IP} \leq c_1^{I,AI}$ n'est plus nécessairement vérifiée. Mais il faut noter que l'on n'a plus non plus l'égalité $c_1^{F,AI} = c_1^{F,IP}$. De ce fait, Gollier et alii **?** s'intéresse avant tout à ce qu'ils appellent un "effet de précaution" lorsque $c_1^{F,IP} \leq c_1^{F,AI}$[9]. Nous parlerons pour notre part "d'effet informationnel pur".

Dire que l'effet irréversibilité n'est pas vérifié lorsque $c_1^{I,IP} > c_1^{I,AI}$ est ambigu car en fait on peut tout à fait avoir la situation dans laquelle on aurait $c_1^{I,IP} = c_1^{F,IP} > c_1^{I,AI} = c_1^{F,AI}$ c'est à dire une situation où la contrainte d'irréversibilité n'est pas liante et c'est donc l'information seule qui n'a pas l'effet voulu. Dans ce cas, il est délicat de parler d'un effet inversé des irréversibilités alors que justement la contrainte d'irréversibilité ne joue aucun rôle contraignant. L'information joue donc en soi un rôle qu'il faut distinguer de celui de l'irréversibilité. La typologie proposée ici permet d'éviter la confusion des différents effets.

Définition 1 *Il y a un effet irréversibilité pur si à structure d'information donnée, la contrainte d'irréversibilité induit des décisions optimales moins irréversibles en première période (i.e :* $c_1^{I,AI} \leq c_1^{F,AI}$ *et* $c_1^{I,IP} \leq c_1^{F,IP}$ *)*

Cet effet n'est en général pas étudié dans la littérature[10] alors que d'une certaine manière, il correspond à l'idée la plus naturelle que l'on puisse se faire d'un "effet irréversibilité". L'existence d'une contrainte d'irréversibilité introduit un arbitrage pour le décideur entre ses objectifs de première période et sa flexibilité décisionnelle de seconde période. Il s'agit donc de vérifier que cet arbitrage conduit bien le décideur à faire des choix moins irréversibles, celui-ci cherchant à relâcher ses contraintes de choix en seconde période.

[9] Comme nous l'avons vu plus haut, pour les modèles de réchauffement climatique, moins émettre en première période, c'est être plus précautionneux.

[10] Peut-être parce qu'il est trop évident?

Définition 2 *Il y a un effet informationnel pur si en l'absence de contrainte d'irréversibilité, une structure d'information plus fine induit une décision optimale plus précautionneuse en première période.*

Lorsqu'être plus précautionneux est équivalent à réduire c_1, alors l'*effet informationnel pur* correspond formellement à $c_1^{F,IP} \leq c_1^{F,AI}$.

Définition 3 *Il y a un effet irréversibilité informationnel si la contrainte d'irréversibilité "amplifie" l'effet informationnel pur avec* $c_1^{F,IP} \leq c_1^{F,AI}$ [11] *on a alors* $c_1^{I,IP} \leq c_1^{I,AI}$

Il s'agit d'un effet de second ordre : quand la notion de précaution coïncide avec celle d'irréversibilité, l'introduction de la contrainte d'irréversibilité maintient l'effet informationnel pur qui existait sans irréversibilité[12]. Lorsque $c_1^{F,AI} = c_1^{F,IP}$, l'existence d'un effet irréversibilité informationnel est équivalent à "l'effet irréversibilité" tel que désigné dans la littérature. L'effet irréversibilité informationnel a donc été démontré dans un cadre Bayésien pour les modèles d'irréversibilité décisionnel. Bien entendu, il n'existe aucun résultat sur celui-ci pour les autres types de modèle.

Contrairement à la définition standard de l'effet irréversibilité, cette dernière définition permet de faire la part entre le rôle de l'information par rapport à celui des irréversibilités.

3 Résultats principaux

Nous analysons la validité des différents effets définis dans la section précédente en situation d'incertitude totale et probabilisée.La proposition suivante établit les résultats en situation d'incertitude totale [13]:

Proposition 1 *Sous les hypothèses 1 et 2, en incertitude totale et avec le critère de Max-min :*

(i) L'effet irréversibilité pur est vérifié: à structure d'information donnée, la contrainte d'irréversibilité induit des décisions optimales moins irréversibles en première période, i.e. $c_1^{F,AI} \geq c_1^{I,AI}$ *et* $c_1^{F,IP} \geq c_1^{I,IP}$

(ii) L'effet informationnel pur n'est pas nécessairement vérifié : en l'absence de contrainte d'irréversibilité, l'information parfaite n'induit pas nécessairement des décisions de première période plus précautionneuses que l'absence d'information.

(iii) Si $c_1^{F,AI} \geq c_1^{F,IP}$ *alors on a aussi* $c_1^{I,AI} \geq c_1^{I,IP}$ *et par conséquent ceci implique que l'effet irréversibilité informationnel est vérifié.*

La présence d'irréversibilité a un double effet :

- la présence d'irréversibilité rend les décisions courantes plus flexibles quelle que soit la structure informationnelle,

- l'effet irréversibilité informationnel est vérifié.

Au total, la présence d'irréversibilité joue bien le rôle que l'on s'attend à lui voir jouer. Ces résultats jouent positivement en faveur de notre typologie pour faire la part

[11] On est dans le cas où pour être plus précautionneux il faut réduire c_1.

[12] On aurait pu souhaiter une caractérisation quantitative pour cette "amplification", mais par exemple, une définition du type $(c_1^{I,AI} - c_1^{I,IP}) \geq (c_1^{F,AI} - c_1^{F,IP})$ est impossible à vérifier.

[13] On note c_1 la décision optimale induite par l'implémentation du critère Maxmin et $c_1(p)$ la décision optimale induite par le critère Espérance d'utilité.

entre le rôle de l'information et celui des irréversibilités. A contrario, la confusion était manifeste dans la définition standard de l'effet irréversibilité. Gollier et alii **?** notaient qu'ils obtenaient les mêmes conditions suffisantes pour l'effet informationnel (effet précaution dans leur terminologie) et l'effet irréversibilité dans leur modèle. Même si la formalisation que nous avons retenu n'est pas une généralisation de leur modèle, on peut tout à fait comprendre leur résultat à partir des nôtres : puisque que l'effet irréversibilité informationnel est toujours vérifié, ceci implique que l'effet irréversibilité (selon la définition standard) est vérifiée à partir du moment où l'effet informationnel pur est vérifié.

Par ailleurs, on retrouve donc dans nos résultats le fait que l'arrivée d'information a quant à elle un effet ambigu sur la précaution des décisions courantes. Ce résultat n'est guère surprenant car il n'y a guère d'intuition sur le fait qu'en général une information plus fine devrait rendre les décisions plus précautionneuses.

Dans le cas d'une incertitude probabilisée, on retrouve des résultats identiques. C'est ce qu'établit la proposition suivante :

Proposition 2 *Sous les hypothèses 1 et 2, en incertitude probabilisée avec le modèle d'espérance d'utilité :*

(i) L'effet irréversibilité pur est vérifié: à structure d'information donnée, la contrainte d'irréversibilité induit des décisions optimales plus précautionneuses en première période, i.e. $\forall p \in [0,1]$, $c_1^{F,AI}(p) \geq c_1^{I,AI}(p)$ *et* $c_1^{F,IP}(p) \geq c_1^{I,IP}(p)$

(ii) L'effet informationnel pur n'est pas nécessairement vérifié : en l'absence de contrainte d'irréversibilité, l'information parfaite n'induit pas nécessairement des décisions de première période plus précautionneuses.

(iii) Si $c_1^{F,AI}(p) \geq c_1^{F,IP}(p)$ *alors on a aussi* $c_1^{I,AI}(p) \geq c_1^{I,IP}(p)$ *et par conséquent ceci implique que l'effet irréversibilité informationnel est vérifié.*

Si on précise la fonction d'utilité, on peut spécifier les résultats. C'est le cas par exemple si on considère un modèle d'irréversibilité décisionnelle, c'est à dire quand la fonction d'utilité intertemporelle est de la forme $U_1(c_1) + V(c_1 + c_2, \theta_i)$: la fonction d'utilité en seconde période n'est donc fonction que du stock $\delta c_1 + c_2$ avec $\delta = 1$.

Proposition 3 *Sous les hypothèses 1 et 2 et si* $\forall c_2$, $U_2(c_2) = 0$ *alors en l'absence de contrainte d'irréversibilité, la structure d'information n'a pas d'influence sur le choix de première période i.e:* $c_1^{F,AI} = c_1^{F,IP}$

On retrouve de fait en incertitude totale, l'équivalent des résultats connus en incertitude probabilisé.

Si on considère maintenant les modèles traitant du réchauffement climatique, ils ont la particularité de présenter une structure particulière avec l'existence d'un "mauvais" état du monde sur lequel le critère Max-min se "focalise". Dans le modèle d'Ulph et Ulph **?** où la fonction d'utilité est

$$U_1(c_1) + U_2(c_2) - \theta_i D(\delta c_1 + c_2)$$

avec par exemple $\theta_1 < \theta_2$, θ_2 est ce "mauvais" état du monde. Dès lors, en incertitude totale, quelque soit la situation d'information, le critère Max-min va conduire à se focaliser sur l'état θ_2 et on maximisera simplement la fonction suivante

$$U_1(c_1) + V_2(c_2) - \theta_2 D(\delta c_1 + c_2)$$

Dans ce cas, la structure d'information n'a pas d'influence sur les décisions de première période i.e: $c_1^{F,AI} = c_1^{F,IP}$ et $c_1^{I,AI} = c_1^{I,IP}$. De manière trivial, l'information a un effet nul. Ce résultat en incertitude totale se distingue de celui établit par Ulph et Ulph **?** en incertitude probabilisée où ceux ci exhibent des exemples où ils obtiennent $c_1^{F,AI}(p) < c_1^{F,IP}(p)$.

4 Comportement en incertitude totale et en incertitude probabilisée

Si dans les grandes lignes, les résultats principaux sont qualitativement équivalents dans les deux situations d'incertitude, ce qui montre que l'influence de la présence d'irréversibilité ne dépend pas de la nature de l'incertitude à laquelle on est confronté, on peut se demander si quantitativement, le comportement est identique. Notamment, l'intuition suggère que la situation d'incertitude totale devrait rendre les comportements plus "frileux" et que cela pourrait se traduire par des décisions plus précautionneuses ou moins irréversibles qu'en incertitude probabilisée. Cette intuition on va le voir, n'est pas confirmée par les résultats obtenus. Pour mener cette analyse, nous nous contentons d'examiner le modèle simple des irréversibilités décisionnelles (Arrow et Fisher**?**, Henry **?**, Freixas et Laffont**?**), c'est à dire à une fonction d'utilité de la forme $U_1(c_1) + V(c_1 + c_2, \theta)$.

Proposition 4 *Il existe des problèmes de décision pour lesquels il existe une probabilité p telle que la décision issue du critère Maxmin est plus irréversible que celle issue du critère Bayésien, i.e.* $c_1^{I,AI} > c_1^{I,AI}(p)$ *et/ou* $c_1^{I,IP} > c_1^{I,IP}(p)$.

L'exemple que nous proposoons pour démontrer ce résultat exploite la possibilité suivante : la contrainte d'irréversibilité peut être liante dans un cadre Bayésien pour des niveaux de c_1 plus faibles que dans une situation d'incertitude totale, ce qui explique la possibilité d'observer $c_1^{I,AI} > c_1^{I,AI}(p)$.

L'utilisation du critère Maxmin, critère qualifié de pessimiste, n'induit donc pas nécessairement l'agent à prendre des décisions moins irréversibles. Toutefois, ces résultats contre-intuitifs ne peuvent se produire que dans des cas particuliers. A contrario, la proposition suivant indique des conditions qui nous assure que le critère du Max-min conduit à prendre des décisions de première période moins irréversibles que dans une situation probabiliste.

Proposition 5 *Sous les hypothèses 1 et 2, si* $\forall c_2$, $U_2(c_2) = 0$ *et* $\delta = 1$,

a) En situation d'information parfaite et en incertitude totale, si pour la solution optimale la contrainte d'irréversibilité n'est pas saturée dans les deux états du monde alors $\forall p \in [0,1]$,

$$c_1^{I,AI} = c_1^{I,AI}(p) = c_1^{F,AI} = c_1^{F,AI}(p) = c_1^{I,IP} = c_1^{I,IP}(p) = c_1^{F,IP} = c_1^{F,IP}(p)$$

b) En situation d'information parfaite et en incertitude totale, si pour la solution optimale la contrainte d'irréversibilité est saturée dans un seul des états du monde avec de plus $U_1'(c_1^{I,IP}) \neq 0$[14], *alors* $\forall p \in]0,1[$ $c_1^{I,IP} < c_1^{I,IP}(p)$.

[14] Cette condition implique que pour le plus mauvais état du monde à l'optimum, la contrainte est liante.

Dans le cas a), le fait que la contrainte d'irréversibilité n'est pas saturée dans les deux états du monde, signifie que la décision de première période n'empêche pas d'obtenir l'utilité maximale en seconde période. Ceci indique que la contrainte d'irréversibilité n'a pas d'effet. En fait, on est dans une situation où le problème de décision séquentiel peut être traité indépendemment pour les deux périodes et en première période on peut se contenter de rechercher la solution qui maximise U_1 sans se préoccuper de la seconde période. Ceci explique les résultats.

La situation b) est une situation qu'il paraît naturel de rencontrer : en seconde période, la contrainte n'est saturée que dans un seul état (par exemple, l'état où l'on apprend que le niveau de dommage est élevé et qu'il faut donc préserver). Le critère Max-min tient alors plus compte de cet état (qui est le mauvais état du monde) qu'un critère Bayésien qui pondère les 2 états du monde et c'est ce qui explique le résultat.

Notons que c'est uniquement dans cette situation *b)* qu'il peut éventuellement exister un effet irréversibilité informationnel positif et donc dans ce cas là, c'est le critère Max-min qui conduit l'agent à faire un choix moins irréversible en information parfaite.

En situation d'incertitude totale, traiter artificiellement de manière Bayésienne le problème de décision n'est pas anodin. Rappelons que c'est le critère Max-min qui permet de nous assurer du meilleur niveau d'utilité dans la pire des éventualités et cela quelle que soit la situation considérée. Le traitement Bayésien revient à tenir également compte dans les arbitrages du dommage marginal dans les états du monde qui ne sont pas les plus mauvais.D'autre part, comme le montre le résultat suivant, le critère Max-min n'est pas réductible à un traitement probabiliste.

Proposition 6 *Sous les hypothèses 1 et 2, si $\forall c_2$, $U_2(c_2) = 0$ et $\delta = 1$, si il y a un effet irréversibilité informationnel positif en incertitude totale, i.e $c_1^{I,IP} < c_1^{I,AI}$ alors il n'existe pas de $p \in [0,1]$ tel que l'on ait simultanément $c_1^{I,IP} = c_1^{I,IP}(p)$ et $c_1^{I,AI} = c_1^{I,AI}(p)$.*

Ceci contredit l'idée répandue que le critère Max-min est un critère paranoïaque. En effet, ce résultat montre que le critère du Max-min ne correspond pas à se focaliser sur le pire, c'est à dire à mettre une probabilité 1 sur le "mauvais état du monde". Au contraire, dans le cas intéressant où à la fois les irréversibilités et l'information jouent un rôle,il n'y a tout simplement pas un mauvais "état du monde" qui soit identifiable.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons premièrement proposé une typologie qui a permis de clarifier les rôles respectifs de l'information et des irréversibilités sur les décisions optimales. Nous avons montré que les résultats qualitatifs sont indépendants de la nature de l'incertitude à laquelle on fait face. Les effets d'irréversibilité pur et d'irréversibilité informationnel montrent que la présence d'irréversibilité doit conduire à adopter des comportements plus précautionneux.

Nous avons adopté dans cet article des structures d'informations simples et un ensemble d'état du monde à deux éléments. L'extension de ces résultats à une situation d'incertitude et d'information plus générales paraît naturel. Tout d'abord, dans une situation d'incertitude probabilisée avec des structures d'information à la Blackwell, il parait tout à fait plausible que l'on retrouve l'existence d'un effet d'irréversibilité informationnel. La généralisation dans un cadre non probabilisé nécessite de préciser la formalisation retenue de l'incertitude et les structures d'information que nous considérerions. L'incertitude totale est une situation particulière qui signifie que nous ne disposons d'aucune présomption quantitative sur le niveau de risque. Souvent, malgré le manque de données, on dispose néanmoins d'indices. On peut formaliser ce genre de situation par une famille de distributions de probabilité sur les états du monde et recourir à un critère Max-min de l'espérance d'utilité[15]. L'incertitude totale avec le critère Max-min, l'incertain probabilisé avec l'espérance d'utilité sont deux cas particuliers de cette formalisation générale. Dans ce cadre, Chassagnon et Vergnaud **?** et Chateauneuf et Vergnaud **?** proposent de considérer un processus d'information qui se traduirait par une réduction de l'ambigüité : après obtention d'une nouvelle information, la famille de probabilité serait réduite. Ces auteurs ont proposé une définition cohérente de structures d'information reposant sur cette idée et démontré que l'on pouvait pratiquer l'optimisation dynamique. Ils ont de plus explicité l'ordre partiel en termes d'informativité classant ces structures d'information. Dans notre modèle, l'absence d'information et l'information parfaite en incertitude totale sont deux structures d'information de ce type[16]. En recourant à cette formalisation générale, il est probable que l'on obtienne une généralisation des résultats.

Nous avons deuxièmement noté les différences entre un traitement Bayésien et le recours au critère du Max-min. Tout d'abord, le critère du Max-min rend en un sens les comportements moins irréversibles. Ensuite, contrairement à ce que l'on pourrait croire, le critère du Max-min ne revient généralement pas à mettre une probabilité 1 sur le "mauvais état du monde", tout simplement parce que l'on ne peut pas identifier un "état du monde" qui soit mauvais quelles que soient les circonstances et le critère Max-min n'est pas réductible à une situation probabilisée où l'on aurait choisi adéquatement la distribution de probabilité. Ces différences se retrouveront probablement dans le cadre plus général des familles de probabilité. On peut d'ailleurs donner une définition intuitive d'une situation plus incertaine ou plus ambigüe reposant sur un accroissement de la famille de probabilité. Au niveau opérationnel, la justification de se ramener à un traitement Bayésien plutôt que d'utiliser le critère du Max-min lorsque l'on dispose de quelques données quantitatives devient moins pertinente du fait de l'alternative du modèle avec famille de probabilité.

6 Annexes

Il est d'usage dans la litérature qui traite de ce type de problème de décision séquentiel d'étudier précisément les fonctions valeurs de seconde période, c'est à dire l'utilité maximale de seconde période que l'on peut atteindre conditionnellement au choix de première période. En préalable à la démonstration des preuves des propositions, nous étudions plus précisément les choix optimaux conditionnels de seconde période, analyse qui est rendue délicate par l'existence de points de non-différentiabilité induit par le critère Max-min.

[15] Par exemple, la famille de probabilité peut correspondre aux distributions de probabilité subjectives des différents experts consultés sur un problème.

[16] Ceci justifie que dans un premier temps nous nous en soyons tenus à la situation extrême de l'incertitude totale qui permet de bien faire apparaître les différences.

6.1 Les fonctions valeurs

6.1.1 Information parfaite.

On notera $I^{\theta_i}(c_1)$ et $F^{\theta_i}(c_1)$ les choix optimaux en présence et en l'absence de la contrainte d'irréversibilité dans l'état θ_i et $J^I(c_1,\theta_i)$, $J^F(c_1,\theta_i)$ les fonctions valeurs correspondantes : pour $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} J^I(c_1,\theta_i) &= U_2(I^{\theta_i}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1),\theta_i) = \underset{c_2 \geq 0}{Max}\{U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2,\theta_i)\} \\ J^F(c_1,\theta_i) &= U_2(F^{\theta_i}(c_1)) + V(\delta c_1 + F^{\theta_i}(c_1),\theta_i) = \underset{c_2}{Max}\{U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2,\theta_i)\} \end{aligned}$$

On notera

$$\begin{aligned} J^I(c_1) &= \underset{\theta_i}{Min} J^I(c_1,\theta_i) \\ J^F(c_1) &= \underset{\theta_i}{Min} J^F(c_1,\theta_i) \end{aligned}$$

les fonctions valeurs anticipées par l'agent lorsqu'il s'attend à recevoir une information parfaite.

Lemme 2 *Sous l'hypothèse 1 et 2 on a :*
(i) pour $i = 1, 2$, $I^{\theta_i}(c_1) = 0 \Leftrightarrow F^{\theta_i}(c_1) \leq 0$ *et* $F^{\theta_i}(c_1) \geq 0 \Leftrightarrow I^{\theta_i}(c_1) = F^{\theta_i}(c_1)$,
(ii) $I^{\theta_i}(c_1)$ *et* $F^{\theta_i}(c_1)$ *sont des fonctions décroissantes de* c_1 *avec* $\frac{dI^{\theta_i}(c_1)}{dc_1} \geq -\delta$ *et* $\frac{dF^{\theta_i}(c_1)}{dc_1} \geq -\delta$,
(iii) $J^I(c_1,\theta_i)$ *et* $J^F(c_1,\theta_i)$ *sont des fonctions concaves,*
(iv) $J^I(c_1)$ *et* $J^F(c_1)$ *sont des fonctions concaves.*

Preuve. (i) évident
(ii) $F^{\theta_i}(c_1)$ est telle que

$$U_2'(F^{\theta_i}(c_1)) + V'(\delta c_1 + F^{\theta_i}(c_1),\theta_i) = 0$$

En différenciant cette égalité par rapport à c_1,on obtient

$$\frac{dF^{\theta_i}(c_1)}{dc_1} = -\delta . \frac{V''}{U_2'' + V''} \leq 0$$

et étant donnée l'hypothèse de stricte concavité on a $\frac{dF^{\theta_i}(c_1)}{dc_1} \geq -\delta$.

Par le résultat (i), on en déduit aussi les résultats pour $I^{\theta_i}(c_1)$

(iii) La fonction $J^I(c_1,\theta_i)$ est partout continue mais il y a un problème éventuel de différentiabilité au point où $I^{\theta_i}(c_1) = F^{\theta_i}(c_1) = 0$ quand la contrainte devient liante. En dehors de ce point, on a

$$\frac{dJ^I(c_1,\theta_i)}{dc_1} = \left[U_2'(I^{\theta_i}(c_1)) + V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1),\theta_i)\right] \frac{dI^{\theta_i}(c_1)}{dc_1} + \delta V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1),\theta_i)$$

et étant données les conditions d'optimalité, le premier terme de l'expression de droite est nul : en effet, soit la contrainte d'irréversibilité n'est pas saturée à l'optimum et le terme $U_2' + V' = 0$, soit elle l'est et on a $\frac{dI^{\theta_i}(c_1)}{dc_1} = 0$. Pour $I^{\theta_i}(c_1) = F^{\theta_i}(c_1) = 0$, on a

$U_2' + V' = 0$ et par conséquent, $\frac{dJ^I(c_1,\theta_i)}{dc_1}$ est bien défini en ce point également. Donc pour tout c_1,

$$\frac{dJ^I(c_1,\theta_i)}{dc_1} = \delta V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i)$$

En différenciant une seconde fois (quand c'est possible), on obtient :

$$\frac{d^2J^I(c_1,\theta_i)}{dc_1^2} = \delta. \left[\delta + \frac{dI^{\theta_i}(c_1)}{dc_1}\right] V''(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i)$$

et du fait de l'hypothèse de stricte concavité et de $\frac{dI^{\theta_i}(c_1)}{dc_1} \geq -\delta$ on a par conséquent $\frac{d^2J^I(c_1,\theta_i)}{dc_1^2} \leq 0$.

$J^I(c_1,\theta_i)$ est une fonction au moins concave par morceaux et comme $\frac{dJ^I(c_1,\theta_i)}{dc_1}$ est continu, elle est globalement concave.

La preuve est similaire pour $J^F(c_1,\theta_i)$.

(iv) Les fonctions $J^I(c_1)$ et $J^F(c_1)$ sont continues. La concavité des fonctions $J^I(c_1,\theta_i)$ et $J^F(c_1,\theta_i)$ implique la concavité par morceaux (sur les intervalles où $J^I(c_1) = J^I(c_1,\theta_i)$ pour le même θ_i et $J^F(c_1) = J^F(c_1,\theta_i)$ pour le même θ_i).

En un point où l'on a $J^I(c_1) = J^I(c_1,\theta_i) = J^I(c_1,\theta_{-i})$, $J^I(c_1') = J^I(c_1',\theta_i)$ à gauche de c_1, $J^I(c_1') = J^I(c_1',\theta_{-i})$ à droite de c_1, alors nécessairement $0 \geq \frac{dJ^I(c_1,\theta_i)}{dc_1} \geq \frac{dJ^I(c_1,\theta_{-i})}{dc_1}$ ce qui signifie que la dérivée à gauche de $J^I(c_1)$ est supérieure à sa dérivée à droite, ce qui démontre que $J^I(c_1)$ est concave sur l'ensemble de son domaine. La preuve est identique pour $J^F(c_1)$. ∎

Le lemme 1 se déduit directement de ces résultats.

Preuve. du lemme 1

Avec les notations introduites, c_1 est plus précautionneuse que c_1' si et seulement si $\forall i = 1,2$ $J^F(c_1,\theta_i) \geq J^F(c_1',\theta_i)$. Or $\frac{dJ^F(c_1,\theta_i)}{dc_1} = \delta V'(\delta c_1 + F^{\theta_i}(c_1), \theta_i)$ et est décroissante en c_1. Il est aisé de vérifier qu'il ne peut y avoir d'autre situation que l'une des situations répertoriées dans le lemme 1. ∎

6.1.2 Absence d'information

On notera $I^{\theta_1,\theta_2}(c_1)$, $F^{\theta_1,\theta_2}(c_1)$, $J^I(c_1,\theta_1,\theta_2)$ et $J^F(c_1,\theta_1,\theta_2)$ les choix optimaux et les fonctions valeurs.

$$\begin{aligned} J^I(c_1,\theta_1,\theta_2) &= \underset{\theta_i}{min}\{U_2(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_i)\} \\ &= \underset{c_2 \geq 0}{Max}\{\underset{\theta_i}{Min}\{U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta_i)\}\} \\ J^F(c_1,\theta_1,\theta_2) &= \underset{\theta_i}{min}\{U_2(F^{\theta_1,\theta_2}(c_1)) + V(\delta c_1 + F^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_i)\} \\ &= \underset{c_2}{Max}\{\underset{\theta_i}{Min}\{U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta_i)\}\} \end{aligned}$$

Lemme 3 *Sous l'hypothèse 2 on a :*

(i) $I^{\theta_1,\theta_2}(c_1) = 0 \Leftrightarrow F^{\theta_1,\theta_2}(c_1) \leq 0$ *et* $F^{\theta_1,\theta_2}(c_1) \geq 0 \Leftrightarrow I^{\theta_1,\theta_2}(c_1) = F^{\theta_1,\theta_2}(c_1)$,

(ii) Il y a deux configurations possibles[17] *:*

[17] Dans le cas Bayésien, le choix de seconde période en absence d'information se situe toujours entre les deux choix optimaux possibles en information parfaite : seul le cas (b) est possible.

(a) soit il existe i tq

$$U_2(I^{\theta_i}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i) \leq U_2(I^{\theta_i}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_{-i})$$

et alors $I^{\theta_1,\theta_2}(c_1) = I^{\theta_i}(c_1)$ *et* $J^I(c_1, \theta_1, \theta_2) = J^I(c_1, \theta_i) = \underset{\theta j}{min} J^I(c_1, \theta_j)$ *(resp.* $\exists i$ *tq*

$$U_2(F^{\theta_i}(c_1)) + V(\delta c_1 + F^{\theta_i}(c_1), \theta_i) \leq U_2(F^{\theta_i}(c_1)) + V(\delta c_1 + F^{\theta_i}(c_1), \theta_{-i})$$

et alors $F^{\theta_1,\theta_2}(c_1) = F^{\theta_i}(c_1)$ *et* $J^F(c_1, \theta_1, \theta_2) = J^F(c_1, \theta_i) = \underset{\theta_j}{min} J^F(c_1, \theta_i)$*)*

(b) soit $\forall i = 1, 2$*,*

$$U_2(I^{\theta_i}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i) > U_2(I^{\theta_i}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_{-i})$$

et alors $\underset{\theta_i}{min} I^{\theta_i}(c_1) < I^{\theta_1,\theta_2}(c_1) < \underset{\theta_i}{\max} I^{\theta_i}(c_1)$ *et* $\forall i = 1, 2$

$$J^I(c_1, \theta_1, \theta_2) = U_2(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_i) < \underset{\theta j}{min} J^I(c_1, \theta_j)$$

(resp. $\forall i = 1, 2$*,*

$$U_2(F^{\theta_i}(c_1)) + V(\delta c_1 + F^{\theta_i}(c_1), \theta_i) > U_2(F^{\theta_i}(c_1)) + V(\delta c_1 + F^{\theta_i}(c_1), \theta_{-i})$$

et alors $\underset{\theta_i}{min} F^{\theta_i}(c_1) < F^{\theta_1,\theta_2}(c_1) < \underset{\theta_i}{\max} F^{\theta_i}(c_1))$ *et*$\forall i = 1, 2$

$$J^F(c_1, \theta_1, \theta_2) = U_2(F^{\theta_1,\theta_2}(c_1)) + V(\delta c_1 + F^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_i) < \underset{\theta_i}{min} J^F(c_1, \theta_j)$$

(iii) $J^I(c_1, \theta_1, \theta_2)$ *et* $J^F(c_1, \theta_1, \theta_2)$ *sont des fonctions concaves en* c_1*.*

Preuve. (i) évident

(ii) Supposons tout d'abord que $\exists i$ tq

$$U_2(I^{\theta_i}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i) \leq U_2(I^{\theta_i}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_{-i})$$

On a donc $J^I(c_1, \theta_i) = \underset{\theta j}{min} J^I(c_1, \theta_j)$ et $\forall c_2 \geq 0$,

$$\begin{aligned} & \underset{\theta_j}{min} \left(U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta_j) \right) \\ \leq \; & U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta_i) \leq U_2(I^{\theta_i}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$J^I(c_1, \theta_1, \theta_2) = \underset{c_2}{Max} \{ \underset{\theta_j}{min} \left(U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta_j) \right) \} = J^I(c_1, \theta_i)$$

avec $I^{\theta_1,\theta_2}(c_1) = I^{\theta_i}(c_1)$.

Supposons maintenant que $\forall i = 1, 2$,

$$U_2(I^{\theta_i}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i) > U_2(I^{\theta_i}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_{-i})$$

et soit i tq $I^{\theta_i}(c_1) = \underset{\theta_j}{min} I^{\theta_j}(c_1)$. La fonction

$$m(c_2) = \underset{\theta_j}{min} \left(U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta_j) \right)$$

est concave en c_2. Puisque

$$U_2(I^{\theta_i}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i) > U_2(I^{\theta_i}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_{-i})$$

et $I^{\theta_i}(c_1) < I^{\theta_{-i}}(c_1)$, $\left(U_2(I^{\theta_i}(c_1) + V(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_{-i})\right)$ est strictement croissante en $I^{\theta_i}(c_1)$ et par conséquent $m(c_2)$ également. Inversement, $m(c_2)$ est strictement décroissante en $I^{\theta_{-i}}(c_1)$ et par conséquent le maximun de $m(c_2)$, c'est à dire $J^I(c_1, \theta_1, \theta_2)$ se produit en $I^{\theta_1,\theta_2}(c_1)$ tel que $I^{\theta_i}(c_1) < I^{\theta_1,\theta_2}(c_1) < I^{\theta_{-i}}(c_1)$. On a nécessairement

$$\begin{aligned} J^I(c_1, \theta_1, \theta_2) &= m(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1)) \\ &= U_2(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_i) \\ &= U_2(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_{-i}) \end{aligned}$$

car sinon, puisque $\left(U_2(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_i)\right)$ est strictement décroissante en $I^{\theta_1,\theta_2}(c_1)$ et $\left(U_2(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1) + V(\delta c_1 + I^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_{-i})\right)$ est strictement croissante en $I^{\theta_1,\theta_2}(c_1)$, $m(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1))$ ne serait pas le maximum de $m(c_2)$. Remarquons finalement que

$$U_2(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_i) < J^I(c_1, \theta_i)$$

et

$$U_2(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_{-i}) < J^I(c_1, \theta_{-i})$$

ce qui montre que $J^I(c_1, \theta_1, \theta_2) < \underset{\theta j}{min} J^I(c_1, \theta_j)$.

La preuve pour la situation sans contrainte d'irréversibilité est similaire.

(iii) Il faut tout d'abord démontrer que l'on a la concavité par morceaux quand on est dans les cas (a) ou (b) du (ii). Il faut ensuite examiner les différents points de discontinuité dans les passages entre les cas (a) et (b).

Dans le cas (a), deux cas se présentent. Soit (cas a_1) $\exists i$ tq

$$J^I(c_1, \theta_1, \theta_2) = J^I(c_1, \theta_i) < J^I(c_1, \theta_{-i})$$

et dans ce cas, on a tout simplement $\frac{dJ^I(c_1,\theta_1,\theta_2)}{dc_1} = \frac{dJ^I(c_1,\theta_i)}{dc_1}$ et la concavité se déduit du résultat (iii) du lemme 2. Soit (cas a_2)

$$U_2(I^{\theta_i}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i) \leq U_2(I^{\theta_i}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_{-i})$$

avec

$$J^I(c_1, \theta_1, \theta_2) = J^I(c_1, \theta_i) = J^I(c_1, \theta_{-i})$$

et dans ce cas, nécessairement on a

$$U_2(I^{\theta_i}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i) = U_2(I^{\theta_i}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_{-i})$$

et $I^{\theta_1,\theta_2}(c_1) = I^{\theta_i}(c_1) = I^{\theta_{-i}}(c_1)$. Supposons (sans perte de généralité) que

$$V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i) \geq V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_{-i})$$

et donc (puisque $\delta + \frac{dI^{\theta_i}(c_1)}{dc_1} \geq 0$) on a

$$\begin{aligned} & U_2'(I^{\theta_i}(c_1))\frac{dI^{\theta_i}(c_1)}{dc_1} + V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i)(\delta + \frac{dI^{\theta_i}(c_1)}{dc_1}) \\ \geq\ & U_2'(I^{\theta_i}(c_1))\frac{dI^{\theta_i}(c_1)}{dc_1} + V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_{-i})(\delta + \frac{dI^{\theta_i}(c_1)}{dc_1}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & U_2'(I^{\theta_{-i}}(c_1))\frac{dI^{\theta_{-i}}(c_1)}{dc_1} + V'(\delta c_1 + I^{\theta_{-i}}(c_1), \theta_i)(\delta + \frac{dI^{\theta_{-i}}(c_1)}{dc_1}) \\ \geq \; & U_2'(I^{\theta_{-i}}(c_1))\frac{dI^{\theta_{-i}}(c_1)}{dc_1} + V'(\delta c_1 + I^{\theta_{-i}}(c_1), \theta_{-i})(\delta + \frac{dI^{\theta_{-i}}(c_1)}{dc_1}) \end{aligned}$$

Par conséquent, $I^{\theta_1,\theta_2}(c_1) = I^{\theta_i}(c_1)$ et $J^I(c_1,\theta_1,\theta_2) = J^I(c_1,\theta_i)$ à gauche de c_1 et $I^{\theta_1,\theta_2}(c_1) = I^{\theta_{-i}}(c_1)$ et $J^I(c_1,\theta_1,\theta_2) = J^I(c_1,\theta_{-i})$ à droite de c_1. La dérivée à gauche de $J^I(c_1,\theta_1,\theta_2)$ est égale à $\frac{dJ^I(c_1,\theta_i)}{dc_1}$ c'est à dire $\delta V'(\delta c_1 + I^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_i)$ et celle à droite à $\frac{dJ^I(c_1,\theta_{-i})}{dc_1}$ c'est à dire $\delta V'(\delta c_1 + I^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_{-i})$. Puisque

$$V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i) \geq V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_{-i})$$

la dérivée à gauche est supérieure à la dérivée à droite ce qui nous assure de la concavité pour le cas (a).

Dans le cas (b), on a (en reprenant les notations ci-dessus introduite dans la preuve de (ii)) $I^{\theta_1,\theta_2}(c_1)$ tel que $I^{\theta_i}(c_1) < I^{\theta_1,\theta_2}(c_1) < I^{\theta_{-i}}(c_1)$ et

$$U_2(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_i) = U_2(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_{-i})$$

Etant données que $\left(U_2(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1) + V(\delta c_1 + I^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_i)\right)$ est strictement décroissante en $I^{\theta_1,\theta_2}(c_1)$ et $\left(U_2(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1) + V(\delta c_1 + I^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_{-i})\right)$ est strictement croissante en $I^{\theta_1,\theta_2}(c_1)$, on a donc

$$V'(\delta c_1 + I^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_i) \neq V'(\delta c_1 + I^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_{-i})$$

et par conséquent, la contrainte $V(\delta c_1 + I^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_i) = V(\delta c_1 + I^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_{-i})$ implique que $\delta c_1 + I^{\theta_1,\theta_2}(c_1) = cst$ et donc $\frac{dI^{\theta_1,\theta_2}(c_1)}{dc_1} = -\delta$. Par conséquent, $\frac{dJ^I(c_1,\theta_1,\theta_2)}{dc_1} = -\delta U_2'(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1))$ et donc $\frac{d^2J^I(c_1,\theta_1,\theta_2)}{dc_1^2} = \delta^2 U_2''(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1)) < 0$ ce qui démontre la concavité.

Considérons une situation où l'on passe du cas (a) au cas (b), c'est à dire pour c_1 où $\exists i$ tel que $I^{\theta_1,\theta_2}(c_1) = I^{\theta_i}(c_1)$,

$$U_2(I^{\theta_i}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i) = U_2(I^{\theta_i}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_{-i})$$

et

$$\begin{aligned} & U_2'(I^{\theta_i}(c_1))\frac{dI^{\theta_i}(c_1)}{dc_1} + V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i)(\delta + \frac{dI^{\theta_i}(c_1)}{dc_1}) \\ > \; & U_2'(I^{\theta_i}(c_1))\frac{dI^{\theta_i}(c_1)}{dc_1} + V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_{-i})(\delta + \frac{dI^{\theta_i}(c_1)}{dc_1}) \end{aligned}$$

La dérivée à gauche de $J^I(c_1,\theta_1,\theta_2)$ est égale à $\frac{dJ^I(c_1,\theta_i)}{dc_1}$ c'est à dire

$$\delta V'(\delta c_1 + I^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_i)$$

et celle à droite à $-\delta U_2'(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1))$. Puisque $V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i) > V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_{-i})$, et puisque

$$0 \geq U_2'(I^{\theta_i}(c_1)) + V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i) > U_2'(I^{\theta_i}(c_1)) + V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_{-i})$$

nécessairement $I^{\theta_i}(c_1) \geq I^{\theta_{-i}}(c_1)$. Puisque l'on est pas dans le cas (a_2) (cf ci dessus), on a $I^{\theta_i}(c_1) > I^{\theta_{-i}}(c_1)$ et par conséquent $U_2'(I^{\theta_i}(c_1)) + V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i) = 0$ ce qui prouve que la dérivée à gauche est égale à celle à droite.

Inversement, considérons une situation où l'on passe du cas (b) au cas (a), c'est à dire pour c_1 où $\exists i$ tel que $I^{\theta_1,\theta_2}(c_1) = I^{\theta_i}(c_1)$,

$$U_2(I^{\theta_i}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i) = U_2(I^{\theta_i}(c_1)) + V(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_{-i})$$

et

$$\begin{aligned} & U_2'(I^{\theta_i}(c_1))\frac{dI^{\theta_i}(c_1)}{dc_1} + V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i)(\delta + \frac{dI^{\theta_i}(c_1)}{dc_1}) \\ < \; & U_2'(I^{\theta_i}(c_1))\frac{dI^{\theta_i}(c_1)}{dc_1} + V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_{-i})(\delta + \frac{dI^{\theta_i}(c_1)}{dc_1}) \end{aligned}$$

La dérivée à gauche de $J^I(c_1, \theta_1, \theta_2)$ est cette fois égale à $-\delta U_2'(I^{\theta_i}(c_1))$ et celle à droite à $\delta V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i)$. Puisque $U_2'(I^{\theta_i}(c_1)) + V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i) \leq 0$, la dérivée à gauche est supérieure à celle à droite.

Par conséquent la concavité est globale.

Les démonstrations pour le cas sans irréversibilité sont similaires. ■

6.2 Preuves des résultats

Preuve. de la proposition 1.

(i) a) Dans le cas de l'information parfaite :

Nous allons prouver que pour tout c_1, la dérivée première de $J^I(c_1)$ (quand elle est définie ou les dérivées à gauche et à droite) est plus petite que la dérivée première de $J^F(c_1)$ (en traitant également convenablement les discontinuités) et la concavité de U_1 nous assure alors que $c_1^{F,IP} \geq c_1^{I,IP}$.

Plusieurs cas sont à distinguer.

- $\forall i = 1, 2$ $F^{\theta_i}(c_1) = I^{\theta_i}(c_1) \geq 0$ alors $J^I(c_1) = J^F(c_1)$ et les dérivées sont identiques.

- $F^{\theta_i}(c_1) < 0 = I^{\theta_i}(c_1) \leq F^{\theta_{-i}}(c_1) = I^{\theta_{-i}}(c_1)$ et puisque

  $$U_2'(F^{\theta_i}(c_1)) + V'(\delta c_1 + F^{\theta_i}(c_1), \theta_i) = U_2'(F^{\theta_i}(c_1)) + V'(\delta c_1 + F^{\theta_{-i}}(c_1), \theta_{-i}) = 0$$

  et $U_2'(F^{\theta_i}(c_1)) > U_2'(F^{\theta_{-i}}(c_1))$ on a donc

  $$\frac{dJ^F(c_1, \theta_i)}{dc_1} = \delta V'(\delta c_1 + F^{\theta_i}(c_1), \theta_i) < \frac{dJ^F(c_1, \theta_{-i})}{dc_1} = \delta V'(\delta c_1 + F^{\theta_{-i}}(c_1), \theta_{-i})$$

  Par ailleurs, on a

  $$\frac{dJ^I(c_1, \theta_i)}{dc_1} = \delta V'(\delta c_1, \theta_i) < \frac{dJ^F(c_1, \theta_i)}{dc_1}$$

  et

  $$\frac{dJ^F(c_1, \theta_{-i})}{dc_1} = \frac{dJ^I(c_1, \theta_{-i})}{dc_1}$$

donc au total,

$$\frac{dJ^I(c_1,\theta_i)}{dc_1} < \frac{dJ^F(c_1,\theta_i)}{dc_1} < \frac{dJ^F(c_1,\theta_{-i})}{dc_1} = \frac{dJ^I(c_1,\theta_{-i})}{dc_1}$$

On a deux sous-cas :
- $J^F(c_1) = J^F(c_1,\theta_i) \leq J^F(c_1,\theta_{-i})$. La dérivée à droite de $J^F(c_1)$ est nécessairement égale à $\frac{dJ^F(c_1,\theta_i)}{dc_1}$ (celle à gauche peut éventuellement être égale à $\frac{dJ^F(c_1,\theta_{-i})}{dc_1}$). On a donc

$$J^I(c_1) = J^I(c_1,\theta_i) < J^F(c_1,\theta_i) \leq J^F(c_1,\theta_{-i}) = J^I(c_1,\theta_{-i})$$

et par conséquent la dérivée de $J^I(c_1)$ (à droite et à gauche) est égale à $\frac{dJ^I(c_1,\theta_i)}{dc_1}$ ce qui prouve le résultat recherché.
- $J^F(c_1) = J^F(c_1,\theta_{-i}) < J^F(c_1,\theta_i)$. La dérivée de $J^F(c_1)$ (à droite et à gauche) est égale à $\frac{dJ^F(c_1,\theta_{-i})}{dc_1}$ et elle est donc nécessairement supérieure à la dérivée à droite et à gauche de $J^I(c_1)$.

- $\forall i = 1,2$ $F^{\theta_i}(c_1) < 0 = I^{\theta_i}(c_1)$. On a donc $\forall i = 1,2$ $\frac{dJ^I(c_1,\theta_i)}{dc_1} < \frac{dJ^F(c_1,\theta_i)}{dc_1}$. Si

$$\max_{\theta_i} \frac{dJ^I(c_1,\theta_i)}{dc_1} \leq \min_{\theta i} \frac{dJ^F(c_1,\theta_i)}{dc_1}$$

on est sûr alors que les positions respectives des dérivées premières de $J^I(c_1)$ et de $J^F(c_1)$ sont bien comme souhaitées. Montrons que on ne peut pas avoir une autre situation, c'est à dire une situation où

$$\frac{dJ^F(c_1,\theta_i)}{dc_1} > \frac{dJ^I(c_1,\theta_i)}{dc_1} \geq \frac{dJ^F(c_1,\theta_{-i})}{dc_1} > \frac{dJ^I(c_1,\theta_{-i})}{dc_1}$$

Supposons que $\frac{dJ^F(c_1,\theta_i)}{dc_1} > \frac{dJ^F(c_1,\theta_{-i})}{dc_1}$. Puisque $\frac{dJ^F(c_1,\theta_j)}{dc_1} = -\delta U_2'(F^{\theta_j}(c_1))$, $\frac{dJ^F(c_1,\theta_i)}{dc_1} > \frac{dJ^F(c_1,\theta_{-i})}{dc_1}$ implique que $U_2'(F^{\theta_i}(c_1)) < U_2'(F^{\theta_{-i}}(c_1))$ et par conséquent $F^{\theta_i}(c_1) < F^{\theta_{-i}}(c_1)$. Donc $U_2'(F^{\theta_{-i}}(c_1)) + V'(\delta c_1 + F^{\theta_{-i}}(c_1),\theta_i) < 0$ alors que $U_2'(F^{\theta_{-i}}(c_1)) + V'(\delta c_1 + F^{\theta_{-i}}(c_1),\theta_{-i}) = 0$. Par conséquent, $V'(\delta c_1 + F^{\theta_{-i}}(c_1),\theta_i) < V'(\delta c_1 + F^{\theta_{-i}}(c_1),\theta_{-i})$. Or $\frac{dJ^I(c_1,\theta_i)}{dc_1} = \delta V'(\delta c_1,\theta_i) < \delta V'(\delta c_1 + F^{\theta_{-i}}(c_1),\theta_i)$ et donc $\frac{dJ^I(c_1,\theta_i)}{dc_1} < \frac{dJ^F(c_1,\theta_{-i})}{dc_1}$ ce qui démontre que nécessairement

$$\max_{\theta_i} \frac{dJ^I(c_1,\theta_i)}{dc_1} \leq \min_{\theta i} \frac{dJ^F(c_1,\theta_i)}{dc_1}$$

b) Dans le cas de l'absence d'information :
De même nous allons prouver que pour tout c_1, la dérivée première de $J^I(c_1,\theta_1,\theta_2)$ (quand elle est définie ou les dérivées à gauche et à droite) est plus petite que la dérivée première de $J^F(c_1,\theta_1,\theta_2)$ (en traitant également convenablement les discontinuités) et la concavité de U_1 nous assure alors que $c_1^{F,AI} \geq c_1^{I,AI}$.
Plusieurs cas sont à distinguer.

- $F^{\theta_1,\theta_2}(c_1) = I^{\theta_1,\theta_2}(c_1) \geq 0$, et les dérivées sont identiques.

- $F^{\theta_1,\theta_2}(c_1) < 0 = I^{\theta_1,\theta_2}(c_1)$ Montrons tout d'abord que pour la fonction valeur $J^I(c_1, \theta_1, \theta_2)$, il est impossible que l'on soit dans le cas (ii)(b) du lemme. En effet supposons au contraire que $I^{\theta_i}(c_1) \leq I^{\theta_1,\theta_2}(c_1) = 0 \leq I^{\theta_{-i}}(c_1)$ et $J^I(c_1, \theta_1, \theta_2) = U_2(0) + V(\delta c_1 + 0, \theta_i) = U_2(0) + V(\delta c_1 + 0, \theta_{-i})$. Puisque $0 \leq I^{\theta_{-i}}(c_1)$ et $F^{\theta_1,\theta_2}(c_1) < 0$, on a donc

$$\begin{aligned} J^I(c_1, \theta_1, \theta_2) &= U_2(0) + V(\delta c_1 + 0, \theta_{-i}) \\ &> U_2(F^{\theta_1,\theta_2}(c_1)) + V(\delta c_1 + F^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_{-i}) \geq J^F\ (c_1, \theta_1, \theta_2) \end{aligned}$$

ce qui montre une contradiction.

Par conséquent, les valeurs possibles que peuvent prendre les dérivées à gauche et à droite de $J^I(c_1, \theta_1, \theta_2)$ sont soit $\frac{dJ^I(c_1,\theta_i)}{dc_1}$, soit $\frac{dJ^I(c_1,\theta_{-i})}{dc_1}$.

Pour les valeurs des dérivées de $J^F(c_1, \theta_1, \theta_2)$, plusieurs sous-cas sont à considérer (correspondant aux cas considérés dans la preuve du lemme 3 (iii)).

a) (référencé comme le cas a_1 dans la preuve du lemme 3) $\exists i$ tq $F^{\theta_1,\theta_2}(c_1) = F^{\theta_i}(c_1)$ et $\frac{dJ^F(c_1,\theta_1,\theta_2)}{dc_1} = \frac{dJ^F(c_1,\theta_i)}{dc_1} = \delta V'(\delta c_1 + F^{\theta_i}(c_1), \theta_i)$.

Puisque $\frac{dJ^I(c_1,\theta_i)}{dc_1} = \delta V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i) = \delta V'(\delta c_1, \theta_i)$, on a

$$\delta V'(\delta c_1 + F^{\theta_i}(c_1), \theta_i) > \delta V'(\delta c_1, \theta_i)$$

Si une des dérivées de $J^I(c_1, \theta_1, \theta_2)$ coincident avec $\frac{dJ^I(c_1,\theta_{-i})}{dc_1}$, on a donc

$$J^I(c_1, \theta_1, \theta_2) = J^I(c_1, \theta_{-i}) \leq J^I(c_1, \theta_i)$$

et puisque $J^I(c_1, \theta_i) < J^F(c_1, \theta_i) \leq J^F(c_1, \theta_{-i})$, cela implique que $F^{\theta_{-i}}(c_1) < 0$. Or on a aussi $F^{\theta_i}(c_1) < 0$ et dans cette situation, nous avons démontré ci-dessus que

$$\max_{\theta_i} \frac{dJ^I(c_1, \theta_i)}{dc_1} \leq \min_{\theta i} \frac{dJ^F(c_1, \theta_i)}{dc_1}$$

Par conséquent, les positions respectives des dérivées premières de $J^I(c_1, \theta_1, \theta_2)$ et de $J^F(c_1, \theta_1, \theta_2)$ sont bien comme souhaitées.

b) (référencé comme le cas a_2 dans la preuve du lemme 3)

$$F^{\theta_1,\theta_2}(c_1) = F^{\theta_i}(c_1) = F^{\theta_{-i}}(c_1)$$

et la dérivée à gauche de $J^F(c_1, \theta_1, \theta_2)$ est égale à

$$\frac{dJ^F(c_1, \theta_i)}{dc_1} = \delta V'(\delta c_1 + F^{\theta_i}(c_1), \theta_i)$$

celle à droite à

$$\frac{dJ^F(c_1, \theta_{-i})}{dc_1} = \delta V'(\delta c_1 + F^{\theta_{-i}}(c_1), \theta_{-i})$$

avec $V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i) \geq V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_{-i})$

De même que ci-dessus, puisque $\forall i = 1, 2\ F^{\theta_i}(c_1) < 0$, on a

$$\max_{\theta_i} \frac{dJ^I(c_1, \theta_i)}{dc_1} \leq \min_{\theta i} \frac{dJ^F(c_1, \theta_i)}{dc_1}$$

ce qui nous assure du résultat.

c) (référencé comme le cas b dans la preuve du lemme 3)

$$F^{\theta_i}(c_1) < F^{\theta_1,\theta_2}(c_1) < F^{\theta_{-i}}(c_1)$$

et $\frac{dJ^F(c_1,\theta_1,\theta_2)}{dc_1} = -\delta U_2'(F^{\theta_1,\theta_2}(c_1))$. On a alors

$$U_2'(F^{\theta_1,\theta_2}(c_1)) + V'(\delta c_1 + F^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_i) < 0$$

et par conséquent

$$-\delta U_2'(F^{\theta_1,\theta_2}(c_1)) > \delta V'(\delta c_1 + F^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_i) > \delta V'(\delta c_1, \theta_i)$$

ce qui montre que $\frac{dJ^F(c_1,\theta_1,\theta_2)}{dc_1} > \frac{dJ^I(c_1,\theta_i)}{dc_1}$.

Si une des dérivées de $J^I(c_1, \theta_1, \theta_2)$ coincident avec $\frac{dJ^I(c_1,\theta_{-i})}{dc_1}$, on a donc

$$J^I(c_1, \theta_1, \theta_2) = J^I(c_1, \theta_{-i}) \leq J^I(c_1, \theta_i)$$

Puisque

$$J^I(c_1, \theta_{-i}) = J^I(c_1, \theta_1, \theta_2) \leq J^F(c_1, \theta_1, \theta_2) < J^F(c_1, \theta_{-i})$$

cela implique que $F^{\theta_{-i}}(c_1) < 0$.

Par conséquent, on a

$$U_2(F^{\theta_{-i}}(c_1)) + V(\delta c_1 + F^{\theta_{-i}}(c_1), \theta_i) < U_2(F^{\theta_{-i}}(c_1)) + V(\delta c_1 + F^{\theta_{-i}}(c_1), \theta_{-i})$$

alors que

$$U_2(0) + V(\delta c_1, \theta_i) \geq U_2(0) + V(\delta c_1, \theta_{-i})$$

et donc

$$V(\delta c_1, \theta_i) - V(\delta c_1 + F^{\theta_{-i}}(c_1), \theta_i) > V(\delta c_1, \theta_{-i}) - V(\delta c_1 + F^{\theta_{-i}}(c_1), \theta_{-i})$$

Du fait de la concavité de V, on a

$$V(\delta c_1, \theta_i) - V(\delta c_1 + F^{\theta_{-i}}(c_1), \theta_i) \leq -F^{\theta_{-i}}(c_1).V'(\delta c_1 + F^{\theta_{-i}}(c_1), \theta_i)$$

et

$$V(\delta c_1, \theta_{-i}) - V(\delta c_1 + F^{\theta_{-i}}(c_1), \theta_{-i}) \geq -F^{\theta_{-i}}(c_1).V'(\delta c_1, \theta_{-i})$$

D'où

$$V'(\delta c_1 + F^{\theta_{-i}}(c_1), \theta_i) > V'(\delta c_1, \theta_{-i})$$

Or

$$V'(\delta c_1 + F^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_i) > V'(\delta c_1 + F^{\theta_{-i}}(c_1), \theta_i)$$

alors que

$$U_2'(F^{\theta_1,\theta_2}(c_1)) + V(\delta c_1 + F^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_i) < 0$$

et par conséquent

$$\frac{dJ^F(c_1, \theta_1, \theta_2)}{dc_1} = -\delta U_2'(F^{\theta_1,\theta_2}(c_1)) > V'(\delta c_1, \theta_{-i}) = \frac{dJ^I(c_1, \theta_{-i})}{dc_1}$$

Par conséquent, les positions respectives des dérivées premières de $J^I(c_1, \theta_1, \theta_2)$ et de $J^F(c_1, \theta_1, \theta_2)$ sont bien comme souhaitées.

d) (référencé comme le passage du cas a au cas b dans la preuve du lemme 3) $F^{\theta_1,\theta_2}(c_1) = F^{\theta_i}(c_1)$ et la dérivée à gauche de $J^F(c_1, \theta_1, \theta_2)$ est égale à $\frac{dJ^F(c_1,\theta_i)}{dc_1} = \delta V'(\delta c_1 + F^{\theta_i}(c_1), \theta_i)$, celle à droite à $-\delta U_2'(F^{\theta_1,\theta_2}(c_1))$. En fait, $\delta V'(\delta c_1 + F^{\theta_i}(c_1), \theta_i) = -\delta U_2'(F^{\theta_1,\theta_2}(c_1))$ et comme montré dans la preuve du lemme 3 (iii) on a alors $F^{\theta_i}(c_1) > F^{\theta_{-i}}(c_1)$ et puisque $\forall i = 1, 2$ $F^{\theta_i}(c_1) < 0$, on a

$$\max_{\theta_i} \frac{dJ^I(c_1, \theta_i)}{dc_1} \leq \underset{\theta i}{min} \frac{dJ^F(c_1, \theta_i)}{dc_1}$$

ce qui nous assure du résultat.

e) (référencé comme le passage du cas b au cas a dans la preuve du lemme 3) $F^{\theta_1,\theta_2}(c_1) = F^{\theta_i}(c_1)$ et la dérivée à gauche de $J^F(c_1, \theta_1, \theta_2)$ est égale à $-\delta U_2'(F^{\theta_1,\theta_2}(c_1))$, celle à droite à $\frac{dJ^F(c_1,\theta_i)}{dc_1} = \delta V'(\delta c_1 + F^{\theta_i}(c_1), \theta_i)$. En fait, $-\delta U_2'(F^{\theta_1,\theta_2}(c_1)) = \delta V'(\delta c_1 + F^{\theta_i}(c_1), \theta_i)$. On a (cf preuve du lemme 3 (iii))

$$\begin{aligned} & U_2'(F^{\theta_i}(c_1)) \frac{dF^{\theta_i}(c_1)}{dc_1} + V'(\delta c_1 + F^{\theta_i}(c_1), \theta_i)(\delta + \frac{dF^{\theta_i}(c_1)}{dc_1}) \\ < \quad & U_2'(F^{\theta_i}(c_1)) \frac{dF^{\theta_i}(c_1)}{dc_1} + V'(\delta c_1 + F^{\theta_i}(c_1), \theta_{-i})(\delta + \frac{dF^{\theta_i}(c_1)}{dc_1}) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_{-i}) > V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i)$$

ce qui implique que $F^{\theta_i}(c_1) < F^{\theta_{-i}}(c_1)$. On peut reprendre dès lors la démonstration faite dans le cas c) ci-dessus.

(ii) Examinons analytiquement le problème rencontré qui empêche l'existence de l'effet informationnel pur. Supposons que $\forall i$ la fonction $V(s, \theta_i)$ est toujours décroissante. On est alors dans le cas où une décision c_1 est plus *précautionneuse* que c_1' ssi $c_1 \leq c_1'$. Pour prouver que $c_1^{F,AI} \geq c_1^{F,IP}$ il faut prouver que les dérivées de $J^F(c_1, \theta_1, \theta_2)$ en $c_1^{F,AI}$ sont plus grandes que les dérivées de $J^F(c_1)$ en $c_1^{F,AI}$. Supposons qu'en $c_1^{F,AI}$ la situation soit la suivante :

$$F^{\theta_{-i}}(c_1^{F,AI}) < F^{\theta_1,\theta_2}(c_1) < F^{\theta_i}(c_1^{F,AI})$$

$$\frac{dJ^F(c_1^{F,AI}, \theta_1, \theta_2)}{dc_1} = -\delta U_2'(F^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{F,AI}))$$

$$J^F(c_1^{F,AI}) = J^F(c_1^{F,AI}, \theta_i) < J^F(c_1^{F,AI}, \theta_{-i})$$

et par conséquent

$$\frac{dJ^F(c_1^{F,AI})}{dc_1} = \frac{dJ^F(c_1^{F,AI}, \theta_i)}{dc_1} = \delta V'(\delta c_1^{F,AI} + F^{\theta_i}(c_1^{F,AI}), \theta_i)$$

On a alors

$$\delta V'(\delta c_1^{F,AI} + F^{\theta_i}(c_1^{F,AI}), \theta_i) = -\delta U_2'(F^{\theta_i}(c_1^{F,AI})) > -\delta U_2'(F^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{F,AI}))$$

et donc

$$\frac{dJ^F(c_1^{F,AI})}{dc_1} > \frac{dJ^F(c_1^{F,AI},\theta_1,\theta_2)}{dc_1}$$

Le lecteur conviendra qu'il est possible d'exhiber un exemple (avec des fonctions quadratiques par exemple) où $c_1^{F,AI} < c_1^{F,IP}$ en faisant en sorte de rencontrer la situation analytique que l'on vient de décrire.

(iii) Supposons que $c_1^{F,AI} \geq c_1^{F,IP}$. Il nous faut montrer que $c_1^{I,AI} \geq c_1^{I,IP}$. Supposons au contraire que $c_1^{I,IP} > c_1^{I,AI}$. Nécessairement alors, les dérivées de $J^I(c_1)$ en $c_1^{I,IP}$ sont plus grandes que les dérivées de $J^I(c_1,\theta_1,\theta_2)$ en $c_1^{I,IP}$. Nous allons montrer que ceci ne peut se produire que dans certaines conditions (cf situation décrite dans la preuve du (ii) ci-dessus). Pour les dérivées de $J^I(c_1,\theta_1,\theta_2)$ en $c_1^{I,IP}$, on peut a priori être dans les cas suivants :

a) (référencé comme le cas a_1 dans la preuve du lemme 3) $\exists i$ tq

$$J^I(c_1^{I,IP},\theta_1,\theta_2) = J^I(c_1^{I,IP},\theta_i) < J^I(c_1^{I,IP},\theta_{-i})$$

et dans ce cas $\frac{dJ^I(c_1^{I,IP},\theta_1,\theta_2)}{dc_1} = \frac{dJ^I(c_1^{I,IP})}{dc_1} = \frac{dJ^I(c_1^{I,IP},\theta_i)}{dc_1}$. Par conséquent, on ne peut être dans cette situation.

b) (référencé comme le cas a_2 dans la preuve du lemme 3)

$$I^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP}) = I^{\theta_i}(c_1^{I,IP}) = I^{\theta_{-i}}(c_1^{I,IP})$$

avec

$$J^I(c_1^{I,IP},\theta_1,\theta_2) = J^I(c_1^{I,IP},\theta_i) = J^I(c_1^{I,IP},\theta_{-i})$$

On peut vérifier (cf preuve du lemme 3) que là encore les dérivées de $J^I(c_1)$ et de $J^I(c_1,\theta_1,\theta_2)$ en $c_1^{I,IP}$ coincident. Par conséquent, on ne peut être dans cette situation.

c) (référencé comme le cas b dans la preuve du lemme 3). On a

$$I^{\theta_{-i}}(c_1^{I,IP}) \leq I^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP}) \leq I^{\theta_i}(c_1^{I,IP})$$

avec

$$\begin{aligned} & U_2(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP})) + V(\delta c_1 + I^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP}),\theta_i) \\ = \; & U_2(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP})) + V(\delta c_1 + I^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP}),\theta_{-i}) \end{aligned}$$

et

$$\frac{dJ^I(c_1^{I,IP},\theta_1,\theta_2)}{dc_1} = -\delta U_2'(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP}))$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{dJ^I(c_1^{I,IP},\theta_i)}{dc_1} &= \delta V'(\delta c_1^{I,IP} + I^{\theta_i}(c_1^{I,IP}),\theta_i) \\ &= -\delta U_2'(I^{\theta_i}(c_1^{I,IP})) \\ &\geq -\delta U_2'(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP})) = \frac{dJ^I(c_1^{I,IP},\theta_1,\theta_2)}{dc_1} \\ &\geq -\delta U_2'(I^{\theta_{-i}}(c_1^{I,IP})) \\ &\geq \delta V'(\delta c_1^{I,IP} + I^{\theta_{-i}}(c_1^{I,IP}),\theta_{-i}) = \frac{dJ^I(c_1^{I,IP},\theta_{-i})}{dc_1} \end{aligned}$$

Il faut donc que

$$\frac{dJ^I(c_1^{I,IP})}{dc_1} = \frac{dJ^I(c_1^{I,IP}, \theta_i)}{dc_1}$$

avec $I^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP}) < I^{\theta_i}(c_1^{I,IP})$ pour obtenir $\frac{dJ^I(c_1^{I,IP})}{dc_1} > \frac{dJ^I(c_1^{I,IP},\theta_1,\theta_2)}{dc_1}$ et par conséquent

$$J^I(c_1^{I,IP}) = J^I(c_1^{I,IP}, \theta_i) \leq J^I(c_1^{I,IP}, \theta_{-i})$$

d) (référencé comme le passage du cas a au cas b dans la preuve du lemme 3) $I^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP}) = I^{\theta_i}(c_1^{I,IP})$,

$$\begin{aligned} & U_2(I^{\theta_i}(c_1^{I,IP})) + V(\delta c_1^{I,IP} + I^{\theta_i}(c_1^{I,IP}), \theta_i) \\ = \ & U_2(I^{\theta_i}(c_1^{I,IP})) + V(\delta c_1^{I,IP} + I^{\theta_i}(c_1^{I,IP}), \theta_{-i}) \end{aligned}$$

et la dérivée à gauche de $J^I(c_1^{I,IP}, \theta_1, \theta_2)$ est égale à $\frac{dJ^I(c_1^{I,IP},\theta_i)}{dc_1} = \delta V'(\delta c_1^{I,IP} + I^{\theta_i}(c_1^{I,IP}), \theta_i)$, celle à droite à $-\delta U_2'(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP}))$. Comme montrer dans la preuve du lemme 3 on a en fait

$$I^{\theta_i}(c_1) > I^{\theta_{-i}}(c_1)$$

$$\delta V'(\delta c_1^{I,IP} + I^{\theta_i}(c_1^{I,IP}), \theta_i) = -\delta U_2'(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP}))$$

et de plus

$$J^I(c_1^{I,IP}) = J^I(c_1^{I,IP}, \theta_i) < J^I(c_1^{I,IP}, \theta_{-i})$$

ce qui implique

$$\frac{dJ^I(c_1^{I,IP})}{dc_1} = \frac{dJ^I(c_1^{I,IP}, \theta_i)}{dc_1} = \delta V'(\delta c_1^{I,IP} + I^{\theta_i}(c_1^{I,IP}), \theta_i) = \frac{dJ^I(c_1^{I,IP}, \theta_1, \theta_2)}{dc_1}$$

Par conséquent, on ne peut être dans cette situation.

e) (référencé comme le passage du cas b au cas a dans la preuve du lemme 3) $I^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP}) = I^{\theta_i}(c_1^{I,IP})$,

$$\begin{aligned} & U_2(I^{\theta_i}(c_1^{I,IP})) + V(\delta c_1^{I,IP} + I^{\theta_i}(c_1^{I,IP}), \theta_i) \\ = \ & U_2(I^{\theta_i}(c_1^{I,IP})) + V(\delta c_1^{I,IP} + I^{\theta_i}(c_1^{I,IP}), \theta_{-i}) \end{aligned}$$

et la dérivée à gauche de $J^I(c_1, \theta_1, \theta_2)$ est égale à $-\delta U_2'(I^{\theta_i}(c_1))$, celle à droite à $\delta V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i)$ avec

$$-\delta U_2'(I^{\theta_i}(c_1)) \geq \delta V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1), \theta_i)$$

On a aussi (cf preuve du lemme 3)

$$V'(\delta c_1^{I,IP} + I^{\theta_i}(c_1^{I,IP}), \theta_i) < V'(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1^{I,IP}), \theta_{-i})$$

et par conséquent

$$I^{\theta_i}(c_1^{I,IP}) \leq I^{\theta_{-i}}(c_1^{I,IP})$$

Il y alors seulement deux possibilités :

- soit $I^{\theta_i}(c_1^{I,IP}) < I^{\theta_{-i}}(c_1^{I,IP})$ et donc

$$J^I(c_1^{I,IP}) = J^I(c_1^{I,IP}, \theta_i) < J^I(c_1^{I,IP}, \theta_{-i})$$

d'où

$$\frac{dJ^I(c_1^{I,IP})}{dc_1} = \frac{dJ^I(c_1^{I,IP},\theta_i)}{dc_1} = \delta V'(\delta c_1^{I,IP} + I^{\theta_i}(c_1^{I,IP}),\theta_i)$$

- soit $I^{\theta_i}(c_1^{I,IP}) = I^{\theta_{-i}}(c_1^{I,IP}) = 0$ avec

$$J^I(c_1^{I,IP}) = J^I(c_1^{I,IP},\theta_i) = J^I(c_1^{I,IP},\theta_{-i})$$

$$U_2'(0) + V'(\delta c_1^{I,IP},\theta_i) < U_2'(0) + V'(\delta c_1^{I,IP},\theta_{-i}) \leq 0$$

la dérivée à gauche de $J^I(c_1^{I,IP})$ est égale à

$$\frac{dJ^I(c_1^{I,IP},\theta_{-i})}{dc_1} = \delta V'(\delta c_1^{I,IP},\theta_{-i}) \leq -\delta U_2'(0)$$

et la dérivée à droite de $J^I(c_1^{I,IP})$ est égale à

$$\frac{dJ^I(c_1^{I,IP},\theta_i)}{dc_1} = \delta V'(\delta c_1^{I,IP},\theta_i)$$

Par conséquent, on ne peut être dans aucune de ces situations.

Nous avons donc prouver que si $c_1^{I,AI} < c_1^{I,IP}$, alors on était nécessairement dans le cas suivant

$$I^{\theta_{-i}}(c_1^{I,IP}) \leq I^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP}) < I^{\theta_i}(c_1^{I,IP})$$

$$\begin{aligned} & U_2(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP})) + V(\delta c_1^{I,IP} + I^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP}),\theta_i) \\ = \; & U_2(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP})) + V(\delta c_1^{I,IP} + I^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP}),\theta_{-i}) \end{aligned}$$

$$J^I(c_1^{I,IP}) = J^I(c_1^{I,IP},\theta_i) \leq J^I(c_1^{I,IP},\theta_{-i})$$

$$\begin{aligned} \frac{dJ^I(c_1^{I,IP},\theta_1,\theta_2)}{dc_1} &= -\delta U_2'(I^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP})) \\ &> \frac{dJ^I(c_1^{I,IP})}{dc_1} = \frac{dJ^I(c_1^{I,IP},\theta_i)}{dc_1} = \delta V(\delta c_1 + I^{\theta_i}(c_1^{I,IP}),\theta_i) \end{aligned}$$

Par conséquent $I^{\theta_i}(c_1^{I,IP}) > 0$ et donc $I^{\theta_i}(c_1^{I,IP}) = F^{\theta_i}(c_1^{I,IP})$. Puisque

$$J^I(c_1^{I,IP},\theta_{-i}) \leq J^F(c_1^{I,IP},\theta_{-i})$$

on a donc

$$J^I(c_1^{I,IP}) = J^I(c_1^{I,IP},\theta_i) = J^F(c_1^{I,IP}) = J^F(c_1^{I,IP},\theta_i)$$

et

$$\frac{dJ^I(c_1^{I,IP})}{dc_1} = \frac{dJ^F(c_1^{I,IP})}{dc_1}$$

Par conséquent, $c_1^{I,IP} = c_1^{F,IP}$.

Si $I^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP}) > 0$, alors $I^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP}) = F^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP})$ et on alors

$$\frac{dJ^I(c_1^{I,IP},\theta_1,\theta_2)}{dc_1} = \frac{dJ^F(c_1^{I,IP},\theta_1,\theta_2)}{dc_1}$$

et puisque $c_1^{I,IP} > c_1^{I,AI}$, on doit avoir $c_1^{I,IP} > c_1^{F,AI}$ et par conséquent $c_1^{F,IP} > c_1^{F,AI}$ ce qui est une contradiction avec l'hypothèse $c_1^{F,IP} \leq c_1^{F,AI}$.

Si $I^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP}) = 0$, alors $I^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP}) = 0 = I^{\theta_{-i}}(c_1^{I,IP})$. Puisque

$$U_2(0) + V(\delta c_1^{I,IP}, \theta_i) = U_2(0) + V(\delta c_1^{I,IP}, \theta_{-i}) = J^I(c_1^{I,IP}, \theta_{-i})$$

alors que $U_2(0) + V(\delta c_1^{I,IP}, \theta_i) < J^I(c_1^{I,IP}, \theta_i)$, on a donc

$$J^I(c_1^{I,IP}, \theta_i) > J^I(c_1^{I,IP}, \theta_{-i})$$

ce qui est une contradiction avec

$$J^I(c_1^{I,IP}) = J^I(c_1^{I,IP}, \theta_i) \leq J^I(c_1^{I,IP}, \theta_{-i})$$

■

Preuve. de la proposition 2

Nous reprenons les notations précédentes en introduisant toutefois :

$$\begin{aligned} J_p^I(c_1) &= E_p J^I(c_1, \theta_i) \\ J_p^F(c_1) &= E_p J^F(c_1, \theta_i) \end{aligned}$$

les fonctions valeurs anticipées par l'agent lorsqu'il s'attend à recevoir une information parfaite, $I_p^{\theta_1,\theta_2}(c_1)$, $F_p^{\theta_1,\theta_2}(c_1)$, $J_p^I(c_1, \theta_1, \theta_2)$ et $J_p^F(c_1, \theta_1, \theta_2)$ les choix optimaux et les fonctions valeurs.

$$\begin{aligned} J_p^I(c_1, \theta_1, \theta_2) &= E_p \left(U_2(I_p^{\theta_1,\theta_2}(c_1)) + V(\delta c_1 + I_p^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_i) \right) \\ &= \underset{c_2 \geq 0}{Max} E_p \left(U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta_i) \right) \\ J_p^F(c_1, \theta_1, \theta_2) &= E_p \left(U_2(F_p^{\theta_1,\theta_2}(c_1)) + V(\delta c_1 + F_p^{\theta_1,\theta_2}(c_1), \theta_i) \right) \\ &= \underset{c_2 \geq 0}{Max} E_p \left(U_2(c_2) + V(\delta c_1 + c_2, \theta_i) \right) \end{aligned}$$

(i) Il suffit de prouver que

$$\frac{dJ_p^I(c_1)}{dc_1} \leq \frac{dJ_p^F(c_1)}{dc_1}$$

et

$$\frac{dJ_p^I(c_1, \theta_1, \theta_2)}{dc_1} \leq \frac{dJ_p^F(c_1, \theta_1, \theta_2)}{dc_1}$$

ce qui se vérifie facilement. (Contrairement à l'incertitude totale, il n'y a pas de problème de discontinuité).

(ii) On peut très bien être confronté à la situation analytique examinée dans la preuve de la proposition 1, avec

$$\frac{dJ_p^F(c_1^{F,AI}(p))}{dc_1} > \frac{dJ_p^F(c_1^{F,AI}(p), \theta_1, \theta_2)}{dc_1}$$

Pour un exemple numérique, le lecteur peut se reporter aux exemples quadratiques proposés par Ulph et Ulph **?**.

(iii) Supposons $c_1^{F,AI}(p) \geq c_1^{F,IP}(p)$ ce qui est équivalent au fait que

$$\frac{dJ_p^F(c_1^{F,AI}(p))}{dc_1} \leq \frac{dJ_p^F(c_1^{F,AI}(p),\theta_1,\theta_2)}{dc_1}$$

c'est à dire

$$\delta.E_pV'(\delta c_1^{F,AI}(p) + F^{\theta_i}(c_1^{F,AI}(p)),\theta_i) \leq \delta.E_pV'(\delta c_1^{F,AI}(p) + F_p^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{F,AI}(p)),\theta_i)$$

- Soit $F_p^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{F,AI}(p)) \geq 0$ et on alors $F_p^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{F,AI}(p) = I_p^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{F,AI}(p))$ et par conséquent $c_1^{F,AI}(p) = c_1^{I,AI}(p) \geq c_1^{F,IP}(p)$. Par le (i), on sait que $c_1^{F,IP}(p) \geq c_1^{I,IP}(p)$. Par conséquent, $c_1^{I,AI}(p) \geq c_1^{I,IP}(p)$.

- Soit $F_p^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{F,AI}(p)) < 0$ et donc $I_p^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{F,AI}(p)) = 0$ et nécessairement aussi $I_p^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,AI}(p)) = 0$. Par conséquent, $\exists i$ tel que $I^{\theta_i}(c_1^{I,AI}(p))) = 0$. On a alors

$$V'(\delta c_1^{I,AI}(p) + I^{\theta_i}(c_1^{F,AI}(p)),\theta_i) = V'(\delta c_1^{I,AI}(p) + I_p^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{F,AI}(p)),\theta_i)$$

Puisque $I^{\theta_{-i}}(c_1^{I,AI}(p))) \geq 0$, on a

$$V'(\delta c_1^{I,AI}(p) + I^{\theta_{-i}}(c_1^{F,AI}(p)),\theta_{-i}) \leq V'(\delta c_1^{I,AI}(p) + I_p^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{F,AI}(p)),\theta_i)$$

et par conséquent

$$\frac{dJ_p^I(c_1^{I,AI}(p))}{dc_1} \leq \frac{dJ_p^I(c_1^{I,AI}(p),\theta_1,\theta_2)}{dc_1}$$

et donc $c_1^{I,AI}(p) \geq c_1^{I,IP}(p)$. ∎

Preuve. de la proposition 3.

En l'absence de contrainte d'irréversibilité, le choix optimal en seconde période donne toujours l'utilité maximale atteignable : on a $\frac{dJ^F(c_1,\theta_i)}{dc_1} = \frac{dJ^F(c_1,\theta_1,\theta_2)}{dc_1} = 0$ ce qui implique que $c_1^{F,AI} = c_1^{F,IP}$ ∎

Preuve. de la proposition 4

Nous allons exhiber un exemple où l'on a $c_1^{I,AI} > c_1^{I,AI}(p)$. Soient les fonctions d'utilité $U_1(c_1) = 3.c_1 - c_1^2$ (maximum de U_1en $c_1 = 3/2$) et $V(c_1 + c_2, \theta_i) = (4.c_1 + c_2 + \theta_i) - (c_1 + c_2 + \theta_i)^2$ avec $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = 1$. La fonction $\underset{\theta_i}{Min} V(c_1 + c_2, \theta_i)$ atteint son maximum en $c_1 + c_2 = 3/2$, donc $I^{\theta_1,\theta_2}(c_1) = 3/2 - c_1$ si $c_1 \leq 3/2$, $I^{\theta_1,\theta_2}(c_1) = 0$ sinon et $\frac{dJ^I(c_1,\theta_1,\theta_2)}{dc_1} = 0$ si $c_1 < 3/2$, $\frac{dJ^I(c_1,\theta_1,\theta_2)}{dc_1} = \frac{\partial V(c_1,\theta_2)}{\partial c_1} = 2 - 2.c_1 < -1$ si $c_1 > 3/2$. Par conséquent, $c_1^{I,AI} = 3/2$. Or par exemple, pour $p = 1/4$, la fonction $1/4V(c_1 + c_2, \theta_1) + 3/4V(c_1 + c_2, \theta_2)$ atteint son maximum en $c_1 + c_2 = 5/4$ et on peut vérifier que $c_1^{I,AI}(p) = 11/8 < c_1^{I,AI} = 3/2$. ∎

Preuve. de la proposition 5

a) Nous sommes donc dans le cas où par exemple, $\forall \theta_i$, $I^{\theta_i}(c_1^{I,IP}) = F^{\theta_i}(c_1^{I,IP}) \geq 0$ avec

$$\frac{dJ^I(c_1^{I,IP},\theta_i)}{dc_1} = \frac{dJ^F(c_1^{I,IP},\theta_i)}{dc_1} = 0$$

et donc

$$\frac{dU_1(c_1^{I,IP})}{dc_1} = \frac{dU_1(c_1^{F,IP})}{dc_1} = 0$$

Par conséquent, $c_1^{I,IP} = c_1^{F,IP}$.

D'autre part, puisque

$$\underset{\theta_i}{min} I^{\theta_i}(c_1) \leq I^{\theta_1,\theta_2}(c_1) \leq \max_{\theta_i} I^{\theta_i}(c_1)$$

on a donc $I^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP}) = F^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP}) \geq 0$ avec $\frac{dJ^I(c_1^{I,IP},\theta_1,\theta_2)}{dc_1} = \frac{dJ^F(c_1^{I,IP},\theta_1,\theta_2)}{dc_1} = 0$ et par conséquent $c_1^{I,IP} = c_1^{F,IP}$ et au total $c_1^{I,AI} = c_1^{F,AI} = c_1^{I,IP} = c_1^{F,IP}$.

En incertitude probabilisée, on a $E_p \frac{dJ^I(c_1^{I,IP},\theta_i)}{dc_1} = 0$ et donc $c_1^{I,IP} = c_1^{I,IP}(p) = c_1^{F,IP}(p)$.

On a aussi $I_p^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP}) = F_p^{\theta_1,\theta_2}(c_1^{I,IP}) \geq 0$ et par conséquent

$$\frac{dJ_p^I(c_1^{I,IP},\theta_1,\theta_2)}{dc_1} = \frac{dJ_p^F(c_1^{I,IP},\theta_1,\theta_2)}{dc_1} = 0$$

d'où $c_1^{I,IP} = c_1^{I,AI}(p) = c_1^{F,AI}(p)$

b) Puisque $U_1'(c_1^{I,IP}) \neq 0$, ceci implique que $\frac{dJ^I(c_1^{I,IP})}{dc_1} \neq 0$ et donc $\exists \theta_i$ tel que $I^{\theta_i}(c_1^{I,IP}) = 0$.

$$J^I(c_1^{I,IP}) = J^I(c_1^{I,IP},\theta_i)$$

et

$$\frac{dJ^I(c_1^{I,IP})}{dc_1} = \frac{dJ^I(c_1^{I,IP},\theta_i)}{dc_1} = V'(c_1^{I,IP},\theta_i) < 0$$

Puisque une seule contrainte est saturée, on a donc $I^{\theta_{-i}}(c_1^{I,IP}) > 0$ et donc

$$\frac{dJ^I(c_1^{I,IP},\theta_{-i})}{dc_1} = 0$$

Or, en incertitude probabilisée, en situation d'information parfaite, en $c_1^{I,IP}$

$$\frac{dJ_p^I(c_1)}{dc_1} = E_p \frac{dJ^I(c_1^{I,IP},\theta_i)}{dc_1} = p_i . \frac{dJ^I(c_1^{I,IP},\theta_i)}{dc_1} > \frac{dJ^I(c_1^{I,IP})}{dc_1}$$

ce qui montre que $c_1^{I,IP} < c_1^{I,IP}(p)$. ■

Preuve. de la proposition 6

Pour avoir $c_1^{I,IP} < c_1^{I,AI}$, il faut nécessairement être dans la situation où $\exists \theta_i$ tel que $I^{\theta_i}(c_1^{I,IP}) = 0$, $I^{\theta_{-i}}(c_1^{I,IP}) > 0$, avec $J^I(c_1^{I,IP}) = J^I(c_1^{I,IP},\theta_i)$,

$$\frac{dJ^I(c_1^{I,IP})}{dc_1} = \frac{dJ^I(c_1^{I,IP},\theta_i)}{dc_1} = V'(c_1^{I,IP},\theta_i) < 0$$

Pour obtenir $c_1^{I,IP}(p) = c_1^{I,IP}$ il faut $p_i = 1$. Mais alors on a aussi $c_1^{I,IP}(p) = c_1^{I,AI}(p)$ ce qui implique $c_1^{I,AI}(p) \neq c_1^{I,AI}$ puisque $c_1^{I,IP} < c_1^{I,AI}$. ■

References

[1] ARROW, K.J., FISHER, A.C. (1974): "Environmental preservation, uncertainty and irreversibility", *Quarterly Journal of Economics*, 88, 312-319.

[2] BLACKWELL, D. (1951): "Comparison of experiments", in J.Neyman, ed., *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (Berkeley : University of California Press, 1951), 93-102.

[3] BOUGLET, T., LANZI T., VERGNAUD J-C (2001): "Maxmin, Maxmax et Minmaxregret: une nouvelle interprétation du Principe de précaution", mimeo.

[4] CHASSAGNON, A., VERGNAUD, J-C (1999): "A positive value of information for a non-Bayesian decision-maker" , mimeo.

[5] CHATEAUNEUF, A., VERGNAUD, J-C (1999): "Ambiguity reduction through new statistical data", mimeo.

[6] CHEVE M., CONGAR R. (2000): "Le Principe de Précaution conduit-il toujours à une utilisation plus conservative des ressources naturelles?", mimeo

[7] DEMPSTER, A.P. (1967): "Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping", *Annals of Mathematical Statistics*, 38, 325-339.

[8] ELLSBERG, D. (1961): "Risk, Ambiguity and the Savage axioms", *Quartely Journal of Economics*, 75, 643-669.

[9] EPSTEIN, L.G., LE BRETON, M.(1993): "Dynamically Consistent Beliefs Must be Bayesian", *Journal of Economic Theory*, 61, 1-22.

[10] FREIXAS, X., LAFFONT, J-J (1984): "On the Irreversibilty Effect", in M.Boyer, R.E. Kihlstrom (eds), *Bayesian models in Economic Theory*, Amsterdam North Holland, 1984, 149-155.

[11] GILBOA, I., SCHMEIDLER, D. (1989): "Maxmin expected utility with a non unique prior", *Journal of Mathematical Economics*, 18, 141-153.

[12] GOLLIER, C., JULLIEN, B., TREICH, N. (2000): "Scientific progress and irreversibility : an economic interpretation of the Precautionary Principle", *Journal of Public Economics*, 75, 229-253.

[13] HENRY C., HENRY M. (2002): "The precautionary principle finally formalized", mimeo

[14] HENRY, C. (1974): "Investment decisions under uncertainty : the irreversibility effect", *American Economic Review*, 64, 1006-1012.

[15] KOLSTAD, C.D. (1996): "Fundamental irreversibilities in stock externalities", *Journal of Public Economics*, 60(2), 221-234.

[16] ULPH, A., ULPH, D. (1997): "Global warming, irreversibility and learning", *The Economic Journal*, 107, 636-650.