Représentations syntaxique et sémantique d'un acte

B. Menoni⋆ J.-Ch. Vergnaud†
menoni@ensae.fr vergnaud@univ-paris1.fr

⋆Panthéon-Sorbonne-Économie, Université Paris 1 & CREST-LFA
Maison des Sciences Économiques
106 - 112 boulevard de L'Hôpital
75647 Paris cedex 13

† Panthéon-Sorbonne-Économie, CNRS & Université Paris 1
Maison des Sciences Économiques
106 - 112 boulevard de L'Hôpital
75647 Paris cedex 13

Résumé :
Dans la plupart des modèles proposés en théorie de la décision individuelle, les agents sont doués d'omniscience logique. Nous proposons ici un cadre formel pour distinguer ce qui relève d'une part du savoir, résultat des capacités computationnelles éventuellement limitées d'un agent et ce qui relève d'autre part des degrés de croyance que l'agent se forme sur ce qu'il juge incertain. Pour cela nous explicitons le langage syntaxique qui décrit les actes sur lesquels portent les préférences de l'agent. Nous proposons un théorème général de représentation des préférences à la Schmeidler [5] fondé axiomatiquement. Nous donnons une condition sous laquelle existe une représentation sémantique recourrant à des mondes éventuellement "impossibles". Nous caractérisons ensuite les comportements par rapport à l'incertain et nous explicitons les conditions sous lesquelles un agent est logiquement omniscient et se comporte comme si ces croyances ne portaient que sur des mondes possibles.

Mots clé : décision dans l'incertain, omniscience logique, logique épistémique.

Classification du *Journal of Economic Literature* : D80, D81, D83, D84.

Abstract:
In individual decision theory, the models generally assume that the decision maker (DM) is logically omniscient. In this paper, we build a model that allows to distinguish between knowledge, that is the product of the DM's computational abilities, and the various degrees of belief the DM holds over what she thinks as being uncertain. In order to achieve our objective, we explicitly introduce a syntactic language that describes the acts the preferences of the DM are defined on. We offer a general representation theorem of preferences *a la* Schmeidler [5]. Then, we provide a condition under which there exists a semantic representation that may require "impossible" worlds. Finally, we specify the DM's behavior towards uncertainty and precise the conditions under which a DM is logically omniscient and behaves as if her beliefs where defined exclusively on possible worlds.

Keywords : decision under uncertainty, logical omniscience, epistemic logic.

Journal of Economic Literature classification : D80, D81, D83, D84.

1 Introduction

Si certains paradoxes en théorie de la décision (paradoxes de Allais, d'Ellsberg...) ont trouvé des solutions par le recours à des modèles généralisant le modèle de l'utilité espérée, pour d'autres paradoxes tel celui de Linda, aucun modèle n'a été encore proposé. Rappelons cet exemple de violation de la règle de conjonction (*conjunction fallacy*) mis en évidence expérimentalement par Tversky et Kahnemann [6]. Après avoir appris quelques éléments biographiques portant sur Linda, un personnage fictif, les sujets doivent répondre à la question suivante : « *check which of the two alternatives (is) more probable*

Linda is a bank teller (T).

Linda is a bank teller and active in the feminist movement ($T \wedge F$) ».

Parmi les 142 sujets auxquels cet exercice a été posé, 85 % ont répondu que la proposition $T \wedge F$ est plus probable que la proposition T. En terme sémantique, les sujets accordent donc un degré de croyance plus élevé à l'événement $T \wedge F$ qu'à l'événement T. Dans un modèle de logique modale classique, l'événement $T \wedge F$ est un sous-événement de l'événement T. A notre connaissance, il n'existe pas de modèle de décision permettant l'expression de telles croyances : même le modèle très général de Schmeidler ne le permet pas puisque les croyances obtenues dans le théorème de représentation sont des capacités (fonction monotone) sur les événements. Dans le même article, Tversky et Kahnemann [6] relatent une étude lors de laquelle ils ont demandé à deux groupes d'étudiants de l'*University of British Columbia*, en avril 1982, d'évaluer la probabilité pour l'un de l'événement (F) « *a massive flood somewhere in North America in 1983, in which more than 1000 people drown* », pour l'autre celle de l'événement ($E \wedge F$) « *an earthquake in California sometime in 1983, causing a flood in which more than 1000 people drown* ». Il ressort de leur étude que la probabilité estimée de l'événement ($E \wedge F$) est significativement supérieure à celle de l'événement (F). Là encore, il n'est pas possible de transcrire de telles croyances dans un modèle existant de décision individuelle. Dans ces deux exemples, les sujets semblent souffrir de problème de cohérence logique.

En théorie des jeux, Geanakoplos [2] a pour sa part popularisé l'idée de rationalité cognitive limitée en reprenant une histoire de Sherlock Holmes. Alors que Sherlock Holmes et son adjoint Watson enquêtent sur la disparition d'un cheval[1], le détective fait état d'un curieux incident

– "Is there any point to which you would wish to draw my attention ?"
– "To the curious incident of the dog in the night-time."
– "The dog did nothing in the night-time."
– "That was the curious incident," remarked Sherlock Holmes.

Sherlock Holmes et Watson cherchent à savoir si un inconnu s'est introduit de nuit dans l'écurie (notons I cette proposition). La présence d'un chien, plus particulièrement le fait que ce dernier n'a pas aboyé (désignons par $\neg A$ cette proposition), aide le détective à decider si I est vraie ou non. Holmes en déduit $\neg I$ par le raisonnement suivant. Premièrement, il sait que si un inconnu entre dans l'étable alors le chien aboit (soit la proposition $I \rightarrow A$) ; il en déduit par la règle du *modus tollens* que $I \rightarrow A \equiv \neg A \rightarrow \neg I$; il en déduit finalement par la règle du *modus ponens* que $\neg I$. Watson quant à lui n'a pas réussi à mener ce raisonnement à terme. Si nous élicitions les croyances de Watson, nous observerions qu'il croit avec certitude $\neg A$ ainsi que $I \rightarrow A$ mais qu'il est incertain au sujet de I. En terme sémantique, on peut ici, contrairement aux exemples de violation de la règle de conjonction, transcrire formellement les croyances de Watson par une capacité sur les événements d'un modèle de logique modale classique. Néanmoins, on peut douter que ceci ait du sens. On sait en effet que si on s'en tenait à ce que Watson croît avec certitude, alors un modèle de Kripke ne permettrait pas de représenter les croyances de Watson et qu'il est nécessaire d'utiliser un modèle sémantique plus général ne reposant pas sur l'hypothèse d'omniscience logique.

Pour modéliser des agents dont les capacités cognitives sont éventuellement limitées, nous proposons tout d'abord de définir précisément les actes, c'est à dire les objets de choix sur lesquels porte les préférences. En théorie de la décision à la Savage, les actes sont des fonctions d'un espace d'états de la nature dans un ensemble de conséquences. Même si la terminologie évoque l'idée d'une sémantique, il n'y a pas de formalisme explicite définissant cet espace d'états et le reliant à des élé-

[1] Cette enquête est relatée dans *Silver Blaze*, nouvelle écrite par Sir Arthur Conan Doyle et parue en 1893.

ments syntaxiques.[2] Le cadre formel que nous proposons et qui semble naturel est de définir les actes en recourant à une syntaxe. Nous retranscrivons alors dans ce cadre l'axiomatique de Schmeidler [5] et obtenons un théorème général de représentation des préférences. Nous montrons ensuite l'intérêt de cette approche qui permet de distinguer ce qui relève des croyances certaines de l'agent de ces degrés de croyance sur les contingences incertaines.

2 Le modèle

Dans l'objectif de décrire précisément un acte à la Savage, il est naturel de décrire les contingences possibles en termes syntaxiques.

2.1 Les briques du modèle

Soit Φ_0 un ensemble fini de *propositions atomiques*. Φ désigne la clôture de Φ_0 sous les connecteurs de de négation, $\neg$ de disjonction, $\vee$, de conjonction, $\wedge$ et d'implication matérielle $\rightarrow$. Nous considérons également que l'ensemble des propositions Φ contient la tautologie $\top$ et la contradiction $\perp$. Si deux propositions φ et ψ de Φ, sont logiquement équivalentes au sens du calcul propositionnel classique, nous noterons $\varphi \equiv \Phi$.

Soit $I \subset \mathbb{N}$, I fini. La famille de propositions $(\alpha_i)_{i\in I} \subset \Phi$ est appelée *support* si et seulement si
(i) $\forall(i,\ j) \in I^2,\ i \neq j,\ \alpha_i \wedge \alpha_j \equiv\perp$;
(ii) $\vee_{i\in I}\alpha_i \equiv \top$.
Un support est une liste finie de propositions deux à deux logiquement contradictoires et dont la disjonction est logiquement équivalente à la tautologie. $\mathscr{S}$ est l'ensemble des supports.

[2]Par contre, les axiomatiques des préférences peuvent ensuite conduire à des croyances révélées (probabilités subjectives, capacités convexes, capacités...) vérifiant certaines propriétés correspondant à de l'omniscience logique.

Soit $\mathscr{C}$ un ensemble non vide et convexe de conséquences. Un acte est défini par rapport à un support et indique quelle conséquence sera obtenue si une proposition du support est vraie. Formellement, on notera un acte $X = (x_i,\ \alpha_i)_{i\in I}$ où $(\alpha_i)_{i\in I}$ est un support et $(x_i)_{i\in I}$ un ensemble de conséquences dans $\mathscr{C}$. $\mathscr{X}$ désigne l'ensemble de tous les actes. On suppose que $\mathscr{X}$ est un espace de mélange. On notera $\sigma(X)$ le support de X et pour α_i dans $\sigma(X)$ on notera $X(\alpha_i)$ la conséquence obtenue si α_i est vraie. Enfin, pour toute conséquence $c \in \mathscr{C}$ on notera $\sigma(X)(c)$ l'ensemble $\{\alpha \in \sigma(X) \mid X(\alpha) = c\}$, c'est à dire l'ensemble des propositions du support pour lesquelles on obtient c.

Soit $S \in \mathscr{S}$ un support. Nous notons $\mathscr{X}^S$, l'ensemble des actes dont le support est S.

Définition 1 (Acte $S-$constants)**.** *Pour tout support $S \in \mathscr{S}$, $\forall c \in \mathscr{C}$, $\mathbf{c}^S$ est l'acte tel que pour tout $\alpha \in S$, $\mathbf{c}^S(\alpha) = c$.*

2.2 Représentation des préférences

La définition que nous avons proposé des actes est justifiée si l'on considère que le problème de décision auquel sera confronté l'agent est défini par un tiers, par exemple un expérimentateur. Dans ce cas, la description des actes doit être cohérente. Au contraire, si c'était l'agent lui même qui devait décrire explicitement les actes auxquels il fait face, il n'est pas évident que la description qu'il en proposerait respecterait les contraintes introduites.

Nous considérons une relation de préférence sur les actes : $\succeq$ désigne une relation binaire sur $\mathscr{X}$. Pour tout support $S \in \mathscr{S}$, $\succeq^S$ désigne la restriction de $\succeq$ à $\mathscr{X}^S$. Nous retranscrivons dans ce cadre l'axiomatique de Schmeidler qui nous permet d'obtenir un théorème de représentation pour chaque restriction $\succeq^S$.

Axiome 1 (Pré-ordre continu)**.** *Pour tout support $S \in \mathscr{S}$, $\succeq^S$ est un pré-ordre continu (au sens de Jensen).*

Définition 2. $\forall\, S \in \mathscr{S}$, $\forall (c,\ c') \in \mathscr{C}^2$,

$$c \succeq^S_{\mathscr{C}} c' \Leftrightarrow \mathbf{c}^S \succeq^S \mathbf{c'}^S.$$

Définition 3. *Soient $S \in \mathscr{S}$ un support et $(X,\ Y) \in \left(\mathscr{X}^S\right)^2$ un couple d'actes dont le support – commun – est $S \in \mathscr{S}$. Ces deux actes sont dits* comonotones *si et seulement pour tout couple $(\alpha,\ \beta) \in S^2$,*

$$X(\alpha) \succeq^S_{\mathscr{C}} X(\beta) \Leftrightarrow Y(\alpha) \succeq^S_{\mathscr{C}} Y(\beta).$$

Axiome 2 (Indépendance comonotone)**.** *Soit $S \in \mathscr{S}$ un support. Pour tout triplet d'actes $(X,\ Y,\ Z) \in \left(\mathscr{X}^S\right)^3$ deux à deux comonotones, pour tout réel $\lambda \in]0;\ 1[$,*

$$X \succ^S Y \Rightarrow \lambda X + (1-\lambda) Z \succ^S \lambda Y + (1-\lambda) Z.$$

Axiome 3 ($\mathscr{C}$ est borné)**.** $\forall\ S \in \mathscr{S}$, $\exists\, (\overline{c_S},\ \underline{c_S}) \in \mathscr{C}^2 \mid \forall\, c \in \mathscr{C},\ \overline{c_S} \succeq^S_{\mathscr{C}} c \succeq^S_{\mathscr{C}} \underline{c_S}$.

Axiome 4 (Non dégénérescence)**.** *Pour tout support $S \in \mathscr{S}$, $\overline{c_S} \succ^S_{\mathscr{C}} \underline{c_S}$.*

Axiome 5 (Dominance)**.** *Pour tout support $S \in \mathscr{S}$, pour tout couple d'actes $(X,\ Y) \in \left(\mathscr{X}^S\right)^2$*

$$\left\{\forall \alpha \in S,\ X(\alpha) \succeq^S_{\mathscr{C}} Y(\alpha)\right\} \Rightarrow X \succeq^S Y.$$

Proposition 1 (Schmeidler [5])**.** *Les axiomes 1 à 5 sont satisfaits si et seulement si pour tout support S il existe une application $u^S : \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ et ν^S telles que :*
– ν^S est une capacité sur 2^S ;
– $\succ^S$ peut-être représentée par

$$\mathcal{U}^S(X) = u^S\left[x_{(n)}\right] + \sum_{i=1}^{n-1} \nu^S\left(\alpha_{(1)},\ \ldots,\ \alpha_{(i)}\right) \left\{u^S\left[x_{(i)}\right] - u^S\left[x_{(i+1)}\right]\right\}.$$

avec $S = \{\alpha_i,\ 1 \leq i \leq n\}$, $X = (x_i,\ \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ et le réordonnement $x_{(1)} \succeq^S_{\mathscr{C}} x_{(2)} \succeq^S_{\mathscr{C}} \ldots \succeq^S_{\mathscr{C}} x_{(n)}$.

De plus, pour tout support S, u^S est unique à une transformée linéaire croissante près et ν^S est unique.

Les résultats obtenus par Tversky et Kahneman [6] rappelés en introduction de ce papier sont compatibles avec l'inégalité suivante

$$\nu^{\{T \wedge F,\ \neg(T \wedge F)\}}(T \wedge F) > \nu^{\{T,\ \neg T\}}(T). \tag{1}$$

2.3 Représentation indépendante du support et équivalence du théorème 1 avec une représentation sémantique

Tout d'abord nous spécifions deux conditions sous lesquelles les fonctions d'utilité et de croyance dans le théorème de représentation deviennent indépendantes du support. Pour cela nous considérons des préférences sur des actes de support différent, ce que nous n'avions pas considéré jusque là.

Axiome 6 (Réduction)**.** *Pour tout couple de supports $(S,\ S') \in \mathscr{S}^2$, pour toute conséquence $c \in \mathscr{C}$, $\mathbf{c}^S \sim \mathbf{c}^{S'}$.*

Sous cet axiome, nous notons $\succeq_{\mathscr{C}}$ la relation binaire – commune à tous les supports – ordonnant $\mathscr{C}$.

Axiome 7 (Saillance des gains)**.** *Soit un couple de supports $(S,\ S') \in \mathscr{S}^2$ tels que $S \cap S' \neq \emptyset$. Sans perte de généralité, nous supposons que $S = (\alpha_1,\ \ldots, \alpha_k,\ \alpha_{k+1},\ \ldots,\ \alpha_n)$ et $S' = (\alpha_1,\ \ldots, \alpha_k,\ \alpha'_{k+1}, \ldots,\ \alpha'_m)$. Alors*

$$\left(\overline{c},\ \alpha_1;\ \ldots;\ \overline{c}, \alpha_k; \underline{c},\ \alpha_{k+1};\ \ldots;\ \underline{c},\ \alpha_n\right) \sim \left(\overline{c},\ \alpha_1;\ \ldots;\ \overline{c}, \alpha_k; \underline{c},\ \alpha'_{k+1};\ \ldots;\ \underline{c},\ \alpha'_m\right).$$

Sous ces deux axiomes supplémentaires, le théorème de représentation devient

Proposition 2. *Les axiomes 1 à 7 sont satisfaits si et seulement si il existe une application* $u\ :\mathscr{C}\rightarrow\mathbb{R}$ *et* $\nu\ :\bigcup_{S\in\mathscr{S}}2^{S}\rightarrow\mathbb{R}$ *telles que :*
– ν *restreint à* 2^S *est une capacité ;*
– $\succ$ *peut-être représentée par*

$$\mathcal{U}\left(X\right)=u\left[x_{(n)}\right]+\sum_{i=1}^{n-1}\nu\left(\alpha_{(1)},\ \ldots,\ \alpha_{(i)}\right)\left\{u\left[x_{(i)}\right]-u\left[x_{(i+1)}\right]\right\}.$$

avec $S=\{\alpha_i,\ 1\leq i\leq n\}$, $X=(x_i,\ \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ *et le réordonnement* $x_{(1)}\succ_{\mathscr{C}}x_{(2)}\succ_{\mathscr{C}}\ldots\succ_{\mathscr{C}}x_{(n)}$.
De plus, u *est unique à une transformée linéaire croissante près et* ν *est unique.*

Nous pouvons sous ces deux axiomes supplémentaires proposer une représentation sémantique des préférences.

Nous nommons *état du monde* toute application $\omega\ :\ \Phi\rightarrow\{0;\ 1\}$ telle que $\omega(\top)=1$ et $\omega(\perp)=0$. Nous notons (ω^v,ω^f) la partition de Φ telle que $\omega^v=\omega^{-1}(1)$ et $\omega^f=\omega^{-1}(0)$. Un monde ω est dit
– *faiblement non contradictoire* si pour toute proposition $\varphi\in\Phi$,

$$\omega(\varphi)=1\Rightarrow\omega(\neg\varphi)=0,$$

– *fortement non contradictoire* si pour toutes propositions $(\varphi,\ \varphi')\in\Phi^{\ 2}$,

$$\varphi\wedge\varphi'=\perp\Rightarrow\{\omega(\varphi)=1\Rightarrow\omega(\varphi')=0\},$$

– *complet* si pour toute proposition $\varphi\in\Phi$,

$$\omega(\varphi)=0\Rightarrow\omega(\neg\varphi)=1,$$

– *possible* s'il est à la fois fortement non contradictoire et complet.

Ω désigne l'ensemble des états du monde et Ω^P le sous ensemble des mondes possibles. Enfin, pour toute proposition $\psi\in\Psi$, nous notons $\parallel\psi\parallel\triangleq\{\omega\in\Omega\mid\psi\in\omega^v\}$.

Définition 4. *Soit* $\mathscr{X}$ *un acte dont le support* $\sigma(X)=(\alpha_i)_{i\in I}$. *Le* représentant sémantique *de l'acte* X*, notée* f_X*, est l'application à valeurs dans* $\mathscr{C}$ *et définie sur* Ω *par*

$$f_X(\omega)\triangleq\max_{\substack{J\subseteq I\ \mid\\ \bigvee_{j\in J}\alpha_j\in\omega^v}}\ \min_{j\in J}X(\alpha_j).$$

Nous sommes désormais en mesure d'établir un théorème de représentation des préférences exprimé dans une sémantique proche, à tout le moins d'un point de vue formel, des modèles de décision classiques.

Proposition 3. *Si les axiomes 1 à 7 sont satisfaits alors il existe une capacité* $\mu\ :\ 2^{\Omega}\rightarrow[0;\ 1]$ *telle que la représentation* $\mathcal{U}$ *de la proposition 2 peut se récrire comme*

$$\mathcal{U}(X)=\int_{\Omega}u\circ f_X d\mu.$$

Dans cette représentation sémantique, le problème de Linda se transcrit dans les termes suivants :

$$\mu\left(\parallel T\wedge F\parallel\right)>\nu\left(\parallel T\parallel\right).\qquad(2)$$

Les sujets accordent un poids plus important à l'évenement ($\parallel T\wedge F\parallel$) qu'à l'événement ($\parallel T\parallel$) μ étant une capacité, nous en déduisons qu'il est nécessaire que $\parallel T\wedge F\parallel\nsubseteq\parallel T\parallel$. Ceci n'est pas possible dans le sous ensemble des mondes possibles. Cela signifie qu'il est nécessaire que les sujets considèrent comme possible des mondes $\omega^*\in\parallel T\wedge F\parallel$ tel que $\omega^*\notin\parallel T\parallel$, c'est à dire des mondes logiquement impossibles.

3 Application

3.1 Comportement par rapport à l'incertain

On peut dans le cadre proposé caractériser les comportements dans l'incertain en retranscrivant les définitions proposées par Schmeidler [5].

Définition 5. *Un agent*

- est averse à l'incertain *si pour tous actes X et X' définis sur le même support, $X \sim X' \Rightarrow \alpha X + (1-\alpha)X' \succeq X$ pour tout $\alpha \in [0,1]$*
- est neutre à l'incertain *si pour tous actes X et X' définis sur le même support, $X \sim X' \Rightarrow \alpha X + (1-\alpha)X' \sim X$ pour tout $\alpha \in [0,1]$*
- aime l'incertain *si pour tous actes X et X' définis sur le même support, $X \sim X' \Rightarrow \alpha X + (1-\alpha)X' \preceq X$ pour tout $\alpha \in [0,1]$*

Proposition 4. *Sous les conditions de la proposition 1, un agent*

- est averse à l'incertain *ssi pour tout support S, ν^S est une capacité convexe sur 2^S,*
- est neutre à l'incertain *ssi pour tout support S, ν^S est une mesure additive sur 2^S,*
- aime l'incertain *ssi pour tout support S, ν^S est une capacité concave sur 2^S,*

Sous les axiomes supplémentaires de la proposition 3, si un agent

- est averse à l'incertain *alors il existe une capacité convexe $\mu : 2^\Omega \to [0;\ 1]$ qui représente ses croyances sur les mondes, 2^S,*
- est neutre à l'incertain *alors il existe une mesure additive $\mu : 2^\Omega \to [0;\ 1]$ qui représente ses croyances sur les mondes,*
- aime l'incertain *alors il existe une capacité concave $\mu : 2^\Omega \to [0;\ 1]$ qui représente ses croyances sur les mondes.*

Watson est un agent qui bien qu'ayant des capacités déductives défaillantes peut néanmoins avoir des croyances probabilistes.

Exemple 1 (Watson)**.** *Supposons que les préférences de Watson soient représentables par un modèle sémantique où ses croyances sont telles qu'il considère équiprobables deux mondes. Le monde ω_1 est un monde possible avec ω_1^v qui contient $\neg A \wedge \neg I$ ainsi que toutes les propositions qui s'en déduisent logiquement alors que ω_2 est un monde impossible avec $\{\neg A,\ I,\ I \rightarrow A,\ \neg A \wedge I\} \subset \omega_2^v$. En ce qui concerne le support $S = (A \wedge I, A \wedge \neg I, \neg A \wedge I, \neg A \wedge \neg I)$, ν est une mesure additive sur 2^S avec $\nu(\neg A \wedge I) = \nu(\neg A \wedge \neg I) = \frac{1}{2}$ et $\nu(A \wedge I) = \nu(A \wedge \neg I) = 0$. Par ailleurs, nous vérifions que $\nu(A) = 0$, $\nu(\neg A) = 1$, $\nu(I) = \nu(\neg I) = \frac{1}{2}$, $\nu(I \rightarrow A) = 1$ et $\nu[\neg(I \rightarrow A)] = 0$.*

3.2 Caractérisation de la rationalité cognitive

Quelles sont les caractéristiques d'un agent qui ne souffre pas de limitation cognitive, c'est à dire dont les croyances certaines sont logiquement cohérentes ? Intuitivement, on se doute qu'il s'agit d'un agent qui reconnaît les équivalences logiques. Pour traduire ceci axiomatiquement, nous définissons tout d'abord une notion d'acte logiquement équivalent.

Définition 6. *Soient X et X' deux actes. On dira que X et X' sont logiquement équivalents si pour tout $c \in \mathscr{C}$ $\vee_{\alpha \in \sigma(X)(c)} \alpha \equiv \vee_{\alpha \in \sigma(X')(c)} \alpha$*

Axiome 8 (Omniscience logique)**.** *Soient X et X' deux actes. Si X et X' sont logiquement équivalents alors $X \sim X'$*

On peut remarquer que cet axiome implique les axiomes 6 et 7.

Proposition 5. *Sous les conditions de la proposition 1, un agent vérifie l'axiome 8 ssi*

- *pour tout support $S = (\alpha_i)_{i \in I}$, pour tout $J \subset I$, $\nu\left(\vee_{j \in J} \alpha_j\right) = \nu\left[(\alpha_j)_{j \in J}\right]$;*
- *pour toute représentation sémantique μ des croyances de l'agent, pour tout proposition $\varphi \in \Phi$, $\mu\left(\parallel \varphi \parallel\right) = \mu\left(\parallel \varphi \parallel \cap\, \Omega^P\right)$.*

Exemple 2 (Watson (suite))**.** *Si nous reprenons l'exmple précédent, nous constatons que* $\mu (\| I \|) = \mu (\{\omega_2\}) = \frac{1}{2} \neq 0 = \mu \left(\| I \| \cap \Omega^P\right)$.

4 Conclusion

Le cadre formel proposé nous permet de représenter les préférences dans l'incertain d'agents ayant une rationalité cognitive limitée. Ceci nous permet de distinguer deux niveaux épistémiques différents chez l'agent : celui de son savoir, c'est-à-dire ses croyances certaines, et celui de ses degrés de croyance. Avoir une rationalité cognitive parfaite, c'est avoir des croyances qui traduisent de l'omniscience logique. Traditionnellement en théorie de la décision, on considère qu'un agent est rationnel s'il est bayésien. Nous avons suggéré qu'un agent pouvait être bayésien tout en ayant une rationalité cognitive limitée. Ceci revient à considérer que la rationalité bayésienne est une rationalité d'un autre ordre. De fait, les arguments normatifs avancés pour le bayésianisme est que seul un agent bayésien est rationnel dans un processus de décision séquentiel avec acquisition d'information. Un objectif futur de nos travaux est de montrer que des axiomes de cohérence dynamique n'impose pas à l'agent d'avoir une rationalité cognitive parfaite.

Références

[1] Brian F. Chellas, (1980), *Modal logic : an introduction*. Cambridge University Press.

[2] Geanakoplos, J. (1989), Game Theory Without Partitions, and Applications to Speculation and Consensus, Cowles Foundation Discussion Papers No. 914, Cowles Foundation, Yale University .

[3] Hintikka, J. (1975), 'Impossible Possible Worlds Vindicated', *Journal of Philosophical Logic* **4**(4), 475–84.

[4] Savage, L. (1972), The Foundations of Statistics, Dover Publications INC., New York.

[5] Schmeidler, D. (1989), 'Subjective Probability and Expected Utility without Additivity', *Econometrica* **57**(3), 571–87.

[6] Tversky, A., Kahneman, D. (1983), 'Extensional Versus Intuitive Reasoning : The Conjunction Fallacy in Probability Judgment', *Psychological Review* **90**(4), 293–315