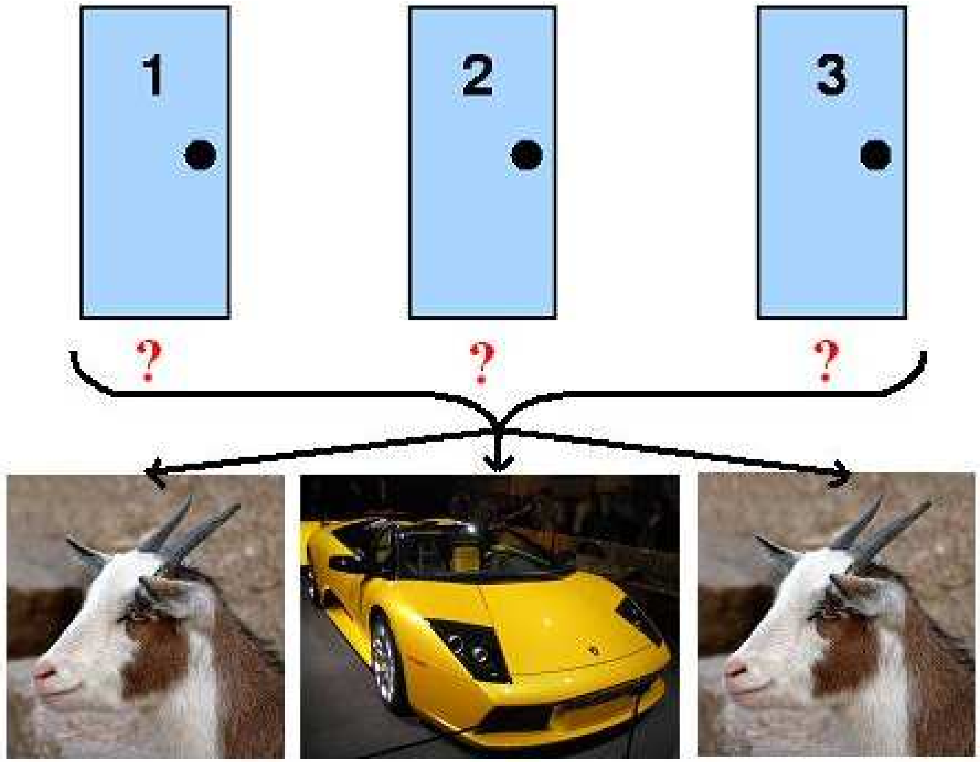
3 Valeur de l'information pour un décideur

Cours 3 et 4 Avril

Plan

- Introduction
- Structure d'information
- Propriétés de la valeur de l'information
- Irréversibilité et quasi valeur d'option

Monty Hall



Monty Hall

- Le jeu oppose un présentateur à un candidat (le joueur). Ce joueur est placé devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture (ou tout autre prix magnifique) et derrière chacune des deux autres se trouvent une chèvre (ou tout autre prix sans importance). Il doit tout d'abord désigner une porte. Puis le présentateur ouvre une porte qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle cachant la voiture (le présentateur sait quelle est la bonne porte dès le début). Le candidat a alors le droit ou bien d'ouvrir la porte qu'il a choisi initialement, ou bien d'ouvrir la troisième porte.
- Les questions qui se posent au candidat sont :
  - Que doit-il faire ?
  - Quelles sont ses chances de gagner la voiture en agissant au mieux ?

Monty Hall : solution Bayesienne

- Supposons choisit la porte 1, quels sont les états de la nature possibles pour représenter l'incertitude restante?
- Etats (1,2) *(Voiture en 1 et Présentateur désigne 2),* (1,3), (2,3), (3,2)
- Quelles probabilités?
- P((1,2) , (1,3))=P((2,3))=P(3,2)=1/3

Monty Hall : solution Bayesienne

- Supposons choisit la porte 1, quels sont les états de la nature possibles pour représenter l'incertitude restante?
- Etats (1,2) *(Voiture en 1 et Présentateur désigne 2),* (1,3), (2,3), (3,2)
- Quelles probabilités?
- P((1,2) , (1,3))=P((2,3))=P(3,2)=1/3
- P((1,2))=a.1/3 , P((1,3))=(1-a).1/3

Monty Hall : solution Bayesienne

- Supposons le présentateur ouvre la porte 2. Qu'est ce que cela signifie.
- Signal qui indique que le vrai état du monde est soit (1,2) soit (3,2).
- Révision par la règle de Bayes des croyances
  - P((1,2)| ((1,2),(3,2)))=(a/3)/(a/3+1/3)=a/(a+1) (=1/3 pour a=1/2)
  - P((3,2)| ((1,2),(3,2)))=1/(a+1) (=2/3 pour a=1/2)

Information

- Signal corrélé avec le vrai état de la nature
- Révision des croyances probabilistes par la règles de Bayes
- Exemples :
  - Pour un médecin, symptômes du patient = signal sur la présence de maladies
  - Pour un géologue, couches géologiques rencontrées par forage = signal sur la présence de pétrole

Pourquoi la règle de Bayes

- Signal = Partition de l'ensemble des états de la nature
- Argument 1: Cohérence des croyances
  - Si apprend E, pour F et G inclus dans E, $P_E(F)/P_E(G)=P(F)/P(G)$
  - $P_E(E^C)=0$, $P_E(E)=1$
- Alors pour tout F, $P_E(F)=P_E(E \cap F)+ P_E(E^C \cap F)= P_E(E \cap F)$

or $P_E(E \cap F) / P_E(E)=P(E \cap F)/P(E)$ donc $P_E(F)= P(E \cap F)/P(E)$

Pourquoi la règle de Bayes

Argument 2 : Fondement axiomatique

Axiome $f_E g \sim_E f$
Implique a) $p_E(E^c) = 0$
Axiome si $f \succeq_E g$ et $f \succeq_{E^c} g$ alors $f \succeq g$
Soit f un gain de 10 sur $F \subset E$,
$U(f) = p(F)u(10)$
$U_E(f) = p_E(F)u(10)$

Il existe x tel que g : un gain de x sur E est équivalent à f conditionnelement à E

$U_E(f) = p_E(F)u(10) = u(x) = U_E(g)$
On a aussi $f \sim_{E^c} g$
Donc $f \sim g$, c'est à dire $U(f) = p(F)u(10) = U(g) = p(E)u(x)$
Donc puisque $p_E(F) = \frac{u(x)}{u(10)} = \frac{p(E)}{p(F)}$

Pourquoi la règle de Bayes

Argument 2 : Fondement axiomatique

Axiome $f_E g \sim_E f$
Implique a) $p_E(E^c) = 0$
Axiome si $f \succeq_E g$ et $f \succeq_{E^c} g$ alors $f \succeq g$
Soit f un gain de 10 sur $F \subset E$,
$U(f) = p(F)u(10)$
$U_E(f) = p_E(F)u(10)$

Il existe x tel que g : un gain de x sur E est équivalent à f conditionnelement à E

$U_E(f) = p_E(F)u(10) = u(x) = U_E(g)$
On a aussi $f \sim_{E^c} g$
Donc $f \sim g$, c'est à dire $U(f) = p(F)u(10) = U(g) = p(E)u(x)$
Donc puisque $p_E(F) = \frac{u(x)}{u(10)} = \frac{p(E)}{p(F)}$

Biais dans le traitement des probabilités

- Exemples trouvés dans les journaux :

- 50 % des accidents en sport concernent le football : le football est le sport le plus risqué!

- 70 % des accidents de vélo concernent des garçons : les garçons prennent plus de risque en vélo!

Biais dans le traitement des probabilités

- Kahneman Tversky (1972)
- "A cab was involved in a hit and run accident at night. Two cab companies, the Green and the Blue, operate in the city. 85% of the cabs in the city are Green and 15% are Blue. A witness identified the cab as Blue. The court tested the reliability of the witness under the same circumstances that existed on the night of the accident and concluded that the witness correctly identified each one of the two colors 80% of the time and failed 20% of the time. What is the probability that the cab involved in the accident was Blue rather than Green?"

Biais dans le traitement des probabilités

- Réponse par la règle de Bayes :

$$P(B|b)=P(B\&b)/(P(B\&b)+P(G\&b)$$

$$= (0{,}15x0{,}8)/(0{,}15x0{,}8+0{,}85x0{,}2)$$

$$= 0{,}12/(0{,}12+0{,}17)$$

$$= 0{,}41$$

Biais dans le traitement des probabilités

- Réponse par la règle de Bayes :

$$P(B|b)=P(B\&b)/(P(B\&b)+P(G\&b)$$
$$= (0{,}15x0{,}8)/(0{,}15x0{,}8+0{,}85x0{,}2)$$
$$= 0{,}12/(0{,}12+0{,}17)$$
$$= 0{,}41$$

- Poids trop faible accordé aux données probabilistes initiales!
- L'inverse est aussi possible (conservatisme)

Structure d'information : définition formelle

Notations :

- ensemble des états du monde : $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$
- messages possibles : $M = \{m_1, \ldots, m_k\}$

Données probabilistes :

- prior : $p(s_i)$
- proba conditionnelles : $p(m_j|s_i)$
- posterior : $p(s_i|m_j)$
- proba jointes : $p(s_i, m_j)$

Structure d'information :

$I = \{M, \{p(m_j|s_i)_{i=1,..,n;j=1,..,k}\}\}$

Cas particulier : Message sans bruit $p(m_j|s_i) = 0$ ou 1

$E_j = \{s_i, p(m_j|s_i) = 1\}$

$\{E_j\}_{j=1,..,k}$ partition de S

Structure d'information : comparaison statistique

Definition 1 *La structure* $I = \{M, \{p(m_j|s_i)_{i=1,..,n;j=1,..,k}\}\}$ *est statistiquement suffisant pour la structure* $I^* = \{M^*, \{p(m_l^*|s_i)_{i=1,..,n;l=1,..,m}\}\}$ *si ils existent* $\forall j, l\ \alpha_{jl} \geq 0$ *tel que*

- $\forall l, \forall i\ p(m_l^*|s_i) = \sum_{j=1,\ldots,k} \alpha_{jl} p(m_j|s_i)$
- $\forall j, \sum_{l=1,\ldots,m} \alpha_{jl} = 1$

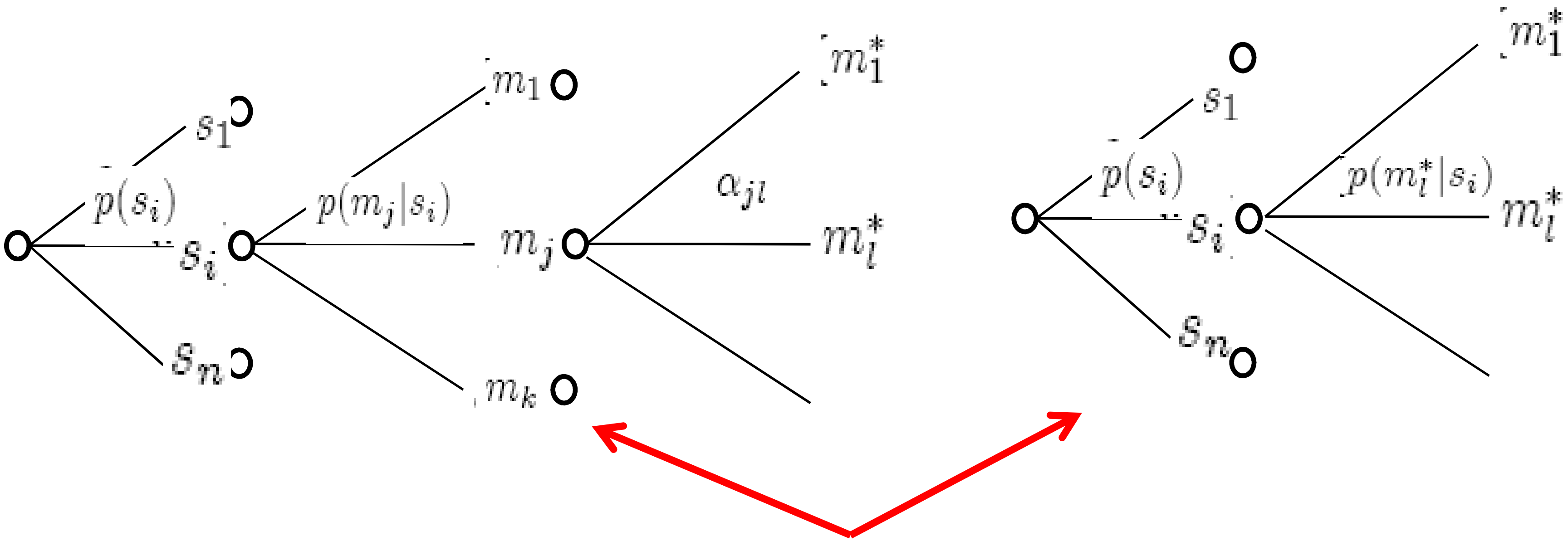
Structure d'information : comparaison statistique

Cas particulier : Messages sans bruit

$\{E_j\}_{j=1,..,k}$ est une partition plus fine que $\{E_l^*\}_{l=1,..,m}$

Interprétation de la notion de statistiquement suffisant

- Comme si c'était un brouillage de l'information



équivalent en termes de probabilités pour les messages M^*

Interprétation de la notion de statistiquement suffisant

- Les probabilités conditionnelles sont plus dispersées avec le message statistiquement suffisant

$$\begin{aligned} p(s_i|m_l^*) &= \frac{p(m_l^*|s_i)p(s_i)}{\sum_i p(m_l^*|s_i)p(s_i)} \\ &= \sum_j \frac{\alpha_{jl}p(m_j)}{\sum_j \alpha_{jl}p(m_j)} p(s_i|m_j) \end{aligned}$$

Exemple

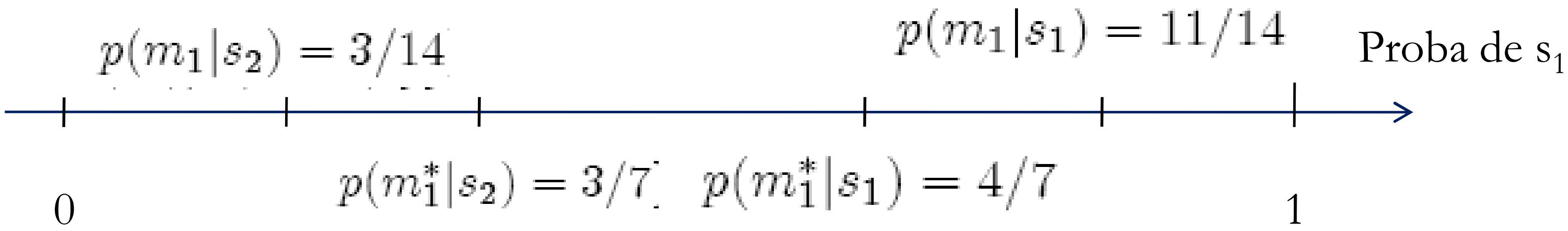
Example 2 $S = \{s_1, s_2\}$ *avec* $p(s_1) = p(s_2) = 1/2$

Deux structures d'information :

$I = \{\{m_1, m_2\}, \{p(m_1|s_1) = 11/14, p(m_1|s_2) = 3/14\}\}$

$I^* = \{\{m_1^*, m_2^*\}, \{p(m_1^*|s_1) = 4/7, p(m_1^*|s_2) = 3/7\}\}$

Moindre dispersion pour le second message



Exemple

On vérifie que I est statistiquement suffisant pour I^* : on recherche $\alpha_{jl} \geq 0$ tels que

- $p(m_1^*|s_1) = \alpha_{11} p(m_1|s_1) + \alpha_{21} p(m_2|s_1)$
- soit $\frac{4}{7} = \alpha_{11} \frac{11}{14} + \alpha_{21} \frac{3}{14}$
- $p(m_1^*|s_2) = \alpha_{11} p(m_1|s_2) + \alpha_{21} p(m_2|s_2)$
- soit $\frac{3}{7} = \alpha_{11} \frac{3}{14} + \alpha_{21} \frac{11}{14}$
- $\alpha_{11} + \alpha_{12} = 1$
- $\alpha_{21} + \alpha_{22} = 1$

D'où $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{5}{8}, \alpha_{21} = \alpha_{12} = \frac{3}{8}$

$p(s_1|m_1) = \frac{11}{14},\ p(s_1|m_2) = \frac{3}{14},\ p(s_1|m_1^*) = \frac{4}{7},\ p(s_1|m_2^*) = \frac{3}{7}$

Définition de la valeur de l'information

Ensemble de choix C

Sans info :

$$\underset{f\in C}{Max}\sum_i p(s_i)u(f(s_i))$$

Avec info selon $I = \{M, \{p(m_j|s_i)_{i=1,..,n;j=1,..,k}\}\}$

$$\sum_j p(m_j)\underset{f\in C}{Max}\sum_i p(s_i|m_j)u(f(s_i))$$

Une définition de la valeur de l'information :

$$V(I,C) = \sum_j p(m_j)\underset{f\in C}{Max}\sum_i p(s_i|m_j)u(f(s_i)) - \underset{f\in C}{Max}\sum_i p(s_i)u(f(s_i))$$

Valeur de l'information

Proposition 4 $V(I,C) \geq 0$

Proof. Soit $f^* \in \underset{f \in C}{ArgMax} \sum_i p(s_i)u(f(s_i))$ et $f_j^* \in \underset{f \in C}{ArgMax} \sum_i p(s_i|m_j)u(f(s_i))$.

$\forall j$

$$\sum_i p(s_i|m_j)u(f_j^*(s_i)) \geq \sum_i p(s_i|m_j)u(f^*(s_i))$$

$$\sum_j p(m_j) \sum_i p(s_i|m_j)u(f_j^*(s_i)) \geq \sum_j p(m_j) \sum_i p(s_i|m_j)u(f^*(s_i)) = \sum_i p(s_i)u(f^*(s_i))$$

Valeur de l'information est positive, car on peut ne pas s'en servir

(a contrario : anxiété cf Caplin et Leahy 2001. "**Psychological Expected Utility Theory And Anticipatory Feelings**," The Quarterly Journal of Economics, MIT Press, vol. 116(1), pages 55-79)

Théorème de Blackwell

Definition 5 *I est plus informative que I^* si pour tout ensemble de choix C, pour toute fonction d'utilité u et pour toute prior $p(s_i)$, $V(I,C) \geq V(I^*,C)$*

Theorem 6 (Blackwell) *I est plus informative que I^* ssi I est statistiquement suffisant pour I^**

Preuve dans le sens facile

Proof. Dans le cas particulier des partitions, il est facile de voir que si $\{E_j\}_{j=1,..,k}$ est une partition plus fine que $\{E_l^*\}_{l=1,..,m}$ alors la valeur de l'information est plus grande pour la partition $\{E_j\}_{j=1,..,k}$.

Soit

$$f_j \in \underset{f \in C}{ArgMax} \sum_i p(s_i|E_j)u(f(s_i))$$

et

$$f_l^* \in \underset{f \in C}{ArgMax} \sum_i p(s_i|E_l^*)u(f(s_i))$$

Par la règle de Bayes, on a aussi que

$$f_j \in \underset{f \in C}{ArgMax} \sum p(s_i)u(f(s_i))$$

et

$$f_l^* \in \underset{f \in C}{ArgMax} \sum_{s_i \in E_l^*} p(s_i)u(f(s_i))$$

Que $\{E_j\}_{j=1,..,k}$ soit une partition plus fine que $\{E_l^*\}_{l=1,..,m}$ implique que pour tout $l = 1, .., m$, il existe $J(l) \subseteq \{1, .., k\}$ tq $E_j \subseteq E_l^*$. Pour tout $j \in J(l)$,

$$\sum_{s_i \in E_j} p(s_i)u(f_j(s_i)) \geq \sum_{s_i \in E_j} p(s_i)u(f_l^*(s_i)$$

Preuve dans le sens facile

Donc

$$\sum_{j\in J(l)}\left(\sum_{s_i\in E_j} p(s_i)u(f_j(s_i))\right) \geq$$

$$\sum_{j\in J(l)}\left(\sum_{s_i\in E_j} p(s_i)u(f_l^*(s_i)\right) = \sum_{s_i\in E_l^*} p(s_i)u(f_l^*(s_i)$$

Donc

$$\sum_{l}\left(\sum_{j\in J(l)}\left(\sum_{s_i\in E_j} p(s_i)u(f_j(s_i))\right)\right) \geq \sum_{l}\left(\sum_{s_i\in E_l^*} p(s_i)u(f_l^*(s_i)\right)$$

équivalent à

$$\sum_{s_i} p(s_i)u(f_j(s_i)) \geq \sum_{s_i} p(s_i)u(f_l^*(s_i))$$

et donc $V(I,C) \geq V(I^*,C)$ ■

Suite de l'exemple

Considère un problème de choix de portefeuille. Soit un agent dont la fonction d'utilité est $U(w) = -e^{-aw}$*. Il a la possibilité de répartir son investissement entre un actif risqué et un actif non risqué. L'actif risqué peut soit rapporté (1 + r) dans l'état* s_1*, soit rapporté (1 - r) dans l'état* s_2*. L'actif sans risque rapporte 1 pour 1 investi. Soit* w_0 *la richesse initiale.*

Suite de l'exemple : en l'absence d'information

Pour une probabilité $p(s_1) = p$, *le montant optimal* A *investi est solution de*
$\underset{I}{Max} - pe^{-a(w_0+Ar)} - (1-p)e^{-a(w_0-Ar)}$

$A = \frac{1}{2ar}\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$ *et l'utilité espérée est égale à* $-2\sqrt{p(1-p)}e^{-aw_0}$ *(décroissante avec* $p(1-p)$*)*

Sans info : $p(s_1) = p(s_2) = 1/2$ *et donc* $A = 0$ *et l'utilité espérée est* $-e^{-aw_0}$

Suite de l'exemple : avec information

Avec structure d'info I, la valeur de l'information exprimée en terme d'utilité espérée :

$$
\begin{aligned}
V(I) &= p(m_1)\left(-2\sqrt{\frac{11}{14}\cdot\frac{3}{14}}e^{-aw_0}\right) + p(m_2)\left(-2\sqrt{\frac{11}{14}\cdot\frac{3}{14}}e^{-aw_0}\right) - \left(-e^{-aw}\right) \\
&= -e^{-aw_0}\left[2\sqrt{\frac{11}{14}\cdot\frac{3}{14}} - 1\right]
\end{aligned}
$$

Avec structure d'info I, la valeur de l'information exprimée en terme d'utilité espérée :*

$$
V(I^*) = -e^{-aw_0}\left[2\sqrt{\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}} - 1\right]
$$

Propriétés de la valeur de l'information

- « plus informatif que » est un ordre extrêmement partiel sur les structures d'information

voir

Athey et Levin (2001) "The value of information in Monotone Decision problems"

Nicola Persico (2000) Information acquisition in auctions", pp. 135-148, 68, N°1 *Econometrica*

Propriétés de la valeur de l'information

- Demande pour l'information?
- Lien entre aversion au risque et information?

Radner, Roy and Joseph Stiglitz (1984), "A Nonconcavity in the Value of Information" in Marcel Boyer and Richard Kihlstrom, eds. *Bayesian Models in Economic Theory.* Amsterdam: North-Holland, pp. 33–52.

- Mauvaises propriétés!

Propriétés de la valeur de l'information : un exemple

L'exemple du choix de portefeuille avec une fonction CARA permet des calculs explicites du consentement à payer pour l'information et permet d'illuster cette absence de "bonnes" propriété de la valeur de l'information.

Plus généralement, on considère une structure d'information

$$I_\epsilon = \left\{ \{m^+, m^-\}, \left\{ p(m^+|s_1) = \frac{1}{2} + \epsilon, p(m^+|s_2) = \frac{1}{2} - \epsilon \right\} \right\}$$

avec $\frac{1}{2} \geq \epsilon \geq 0$.

Propriétés de la valeur de l'information : un exemple

Si l'agent paie x pour obtenir l'information avant de faire son choix de porte-feuille alors son utilité espérée est :

$$-e^{-a(w_0-x)}\left[2\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right).\left(\frac{1}{2}-\epsilon\right)}\right] = -e^{-a(w_0-x)}\sqrt{1-\epsilon^2}$$

Pour obtenir cette information, il est prêt à payer x tel que

$$-e^{-a(w_0-x)}\sqrt{1-\epsilon^2} = -e^{-aw_0}$$

soit

$$x = \frac{-\ln\sqrt{1-\epsilon^2}}{a}$$

donc décroissant par rapport à a et dont la dérivée par rapport à ϵ est

$$\frac{\partial x}{\partial \epsilon} = \frac{\epsilon}{a\sqrt{1-\epsilon^2}}$$

nulle en $\epsilon = 0$ par exemple.

Information et irréversibilité

Effet irréversibilité :

Arrow, K. J. and Fisher, A. C. (1974). Environmental preservation, uncertainty, and irreversibility, *Quarterly Journal of Economics* **88**(2): 312–319.

Henry, C. (1974). Investment decisions under uncertainty: The irreversibility effect, *American Economic Review* **64**: 1006–12.

Jones, R. A. and Ostroy, J. M. (1984). Flexibility and uncertainty, *Review of Economic Studies* **51**: 13–32.

Information et irréversibilité : modèle simple

Modèle simple :

Deux périodes avec c_1 et c_2 choix de consommation

$$U(c_1) + V\left(c_2 + \tau c_1; s\right)$$

s état de la nature $\{\underline{s}; \overline{s}\}$ équiprobable. U et V strictement concave et deux fois différenciables.

Contrainte d'irréversibilité : $c_2 \in [a; +\infty[\subseteq \mathbb{R}$.

Effet irréversibilité : si le décideur s'attend à une meilleure information, alors il doit adopter une décision plus flexible en première période.

Information et irréversibilité : modèle simple

Formellement :

Si pas d'information c_1^{NI} est solution de

$$\underset{c_1}{Max}\left[U(c_1)+\underset{c_2\in[a;+\infty[}{Max}\left[\frac{1}{2}V\left(c_2+\tau c_1;\underline{s}\right)+\frac{1}{2}V\left(c_2+\tau c_1;\overline{s}\right)\right]\right]$$

Si information sur l'état de la nature, c_1^I est solution de

$$\underset{c_1}{Max}\left[U(c_1)+\frac{1}{2}\underset{c_2\in[a;+\infty[}{Max}V\left(c_2+\tau c_1;\underline{s}\right)+\frac{1}{2}\underset{c_2\in[a;+\infty[}{Max}V\left(c_2+\tau c_1;\overline{s}\right)\right]$$

Effet irréversibilité signifie :

$$c_1^I\leq c_1^{NI}$$

Information et irréversibilité : modèle simple

Une notion équivalente est la quasi valeur d'option. Pour cela, on regarde la valeur de l'information conditionnelle à une décision c_1:

$$\begin{aligned}
V(c_1) &= \left(U(c_1) + \frac{1}{2}\underset{c_2\in[a;+\infty[}{Max} V(c_2+\tau c_1;\underline{s}) + \frac{1}{2}\underset{c_2\in[a;+\infty[}{Max} V(c_2+\tau c_1;\overline{s})\right) \\
&\quad - \left(U(c_1) + \underset{c_2\in[a;+\infty[}{Max}\left[\frac{1}{2}V(c_2+\tau c_1;\underline{s}) + \frac{1}{2}V(c_2+\tau c_1;\overline{s})\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}\underset{c_2\in[a;+\infty[}{Max} V(c_2+\tau c_1;\underline{s}) + \frac{1}{2}\underset{c_2\in[a;+\infty[}{Max} V(c_2+\tau c_1;\overline{s}) \\
&\quad - \underset{c_2\in[a;+\infty[}{Max}\left[\frac{1}{2}V(c_2+\tau c_1;\underline{s}) + \frac{1}{2}V(c_2+\tau c_1;\overline{s})\right]
\end{aligned}$$

On parle de quasi valeur d'option, si

$$\frac{\partial V}{\partial c_1} \leq 0$$

c'est à dire : la valeur de l'information s'accroît avec la flexibilité de la décision de première période.

Information et irréversibilité : modèle simple

Proposition 9 *Il y a une quasi valeur d'option et un effet irréversibilité.*

Proof. Soit

$$\begin{aligned}
\underline{c_2}(a, c_1) &= \underset{c_2 \in [a; +\infty[}{Arg \max} V\left(c_2 + \tau c_1; \underline{s}\right) \\
\overline{c_2}(a, c_1) &= \underset{c_2 \in [a; +\infty[}{Arg \max} V\left(c_2 + \tau c_1; \overline{s}\right) \\
\widetilde{c_2}(a, c_1) &= \underset{c_2 \in [a; +\infty[}{Arg \max} \left[\frac{1}{2} V\left(c_2 + \tau c_1; \underline{s}\right) + \frac{1}{2} V\left(c_2 + \tau c_1; \overline{s}\right)\right]
\end{aligned}$$

Supposons que $\underline{c_2}(a, c_1) \leq \overline{c_2}(a, c_1)$et puisque V est concave : $\underline{c_2}(a, c_1) \leq \widetilde{c_2}(a, c_1) \leq \overline{c_2}(a, c_1)$.

Quatre possibilités selon la saturation des contraintes :

- (i) La contrainte est saturée dans tous les cas: $\underline{c_2}(a, c_1) = \widetilde{c_2}(a, c_1) = \overline{c_2}(a, c_1) = a$. Alors $V(c_1) = 0$.

Information et irréversibilité : modèle simple

- (ii) La contrainte n'est pas saturée dans le "bon " état $\overline{s}$:$\overline{\theta}$: $\underline{c_2}(a,c_1) = \widetilde{c_2}(a,c_1) = a < \overline{c_2}(a,c_1)$ et alors la valeur de l'information est positive

$$V(c_1) = \frac{1}{2}V\left(\overline{c_2}(a,c_1) + \tau c_1; \overline{s}\right) - \frac{1}{2}V\left(a + \tau c_1; \overline{s}\right)$$

Comme les conditions d'optimalité impliquent que $V' = 0$ en $\left(\overline{c_2} + \tau c_1; \overline{s}\right)$ et $V' > 0$ en $\left(a + \tau c_1; \overline{s}\right)$ alors la dérivé de la valeur de l'information est

$$\frac{\partial V}{\partial c_1} = \frac{1}{2}\left(\tau V'\left(\overline{c_2} + \tau c_1; \overline{s}\right) - \tau V'\left(a + \tau c_1; \overline{s}\right)\right) \leq 0$$

- (iii) La contrainte est saturée seulement dans le "mauvais" état $\underline{s}$: $\underline{c_2}(a,c_1) = a < \widetilde{c_2}(a,c_1) \leq \overline{c_2}(a,c_1)$et alors la valeur de l'information est aussi positive

$$\begin{aligned} V(c_1) &= \frac{1}{2}V\left(a + \tau c_1; \underline{s}\right) + \frac{1}{2}V\left(\overline{c_2} + \tau c_1; \overline{s}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}V\left(\widetilde{c_2} + \tau c_1; \underline{s}\right) - \frac{1}{2}V\left(\widetilde{c_2} + \tau c_1; \overline{s}\right) \end{aligned}$$

Les conditions du premier ordre impliquent

$$\frac{\partial V}{\partial c_1} = \frac{1}{2}\tau V'\left(a + \tau c_1; \underline{s}\right) \leq 0$$

Information et irréversibilité : modèle simple

- (iv) Aucune contrainte n'est saturée

$$\begin{aligned} V(c_1) &= \frac{1}{2}V\left(\underline{c_2}+\tau c_1;\underline{s}\right)+\frac{1}{2}V\left(\overline{c_2}+\tau c_1;\overline{s}\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}V\left(\widetilde{c_2}+\tau c_1;\underline{s}\right)-\frac{1}{2}V\left(\widetilde{c_2}+\tau c_1;\overline{s}\right) \end{aligned}$$

et dans ce cas :

$$\frac{\partial V}{\partial c_1}=0$$

■

Principe de précaution

- Modèles cherchant à étendre fonder le Principe de précaution

Ulph, A. and Ulph, D. (1997). Global warming, irreversibility and learning, *The Economic Journal* **107**: 636–650.

Gollier, C., Jullien, B. and Treich, N. (2000). Scientific progress and irreversibility: an economic interpretation of the precautionary principle, *Journal of Public Economics* **75**: 229–253.

Comment des médecins utilisent-ils l’information apportée par un test?

- Enjeux de l’étude :
  - Prise en compte des effets de contexte
  - Etude des comportements des praticiens
  - Développement de technique d’aide à la décision

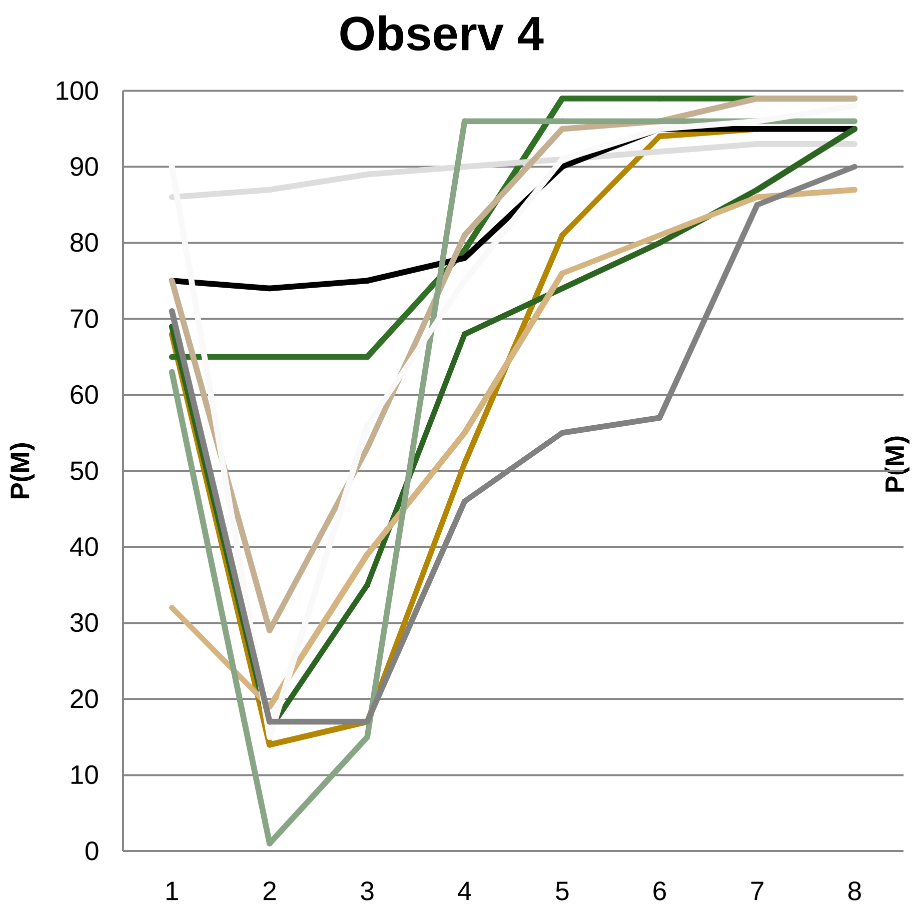
Premiers résultats

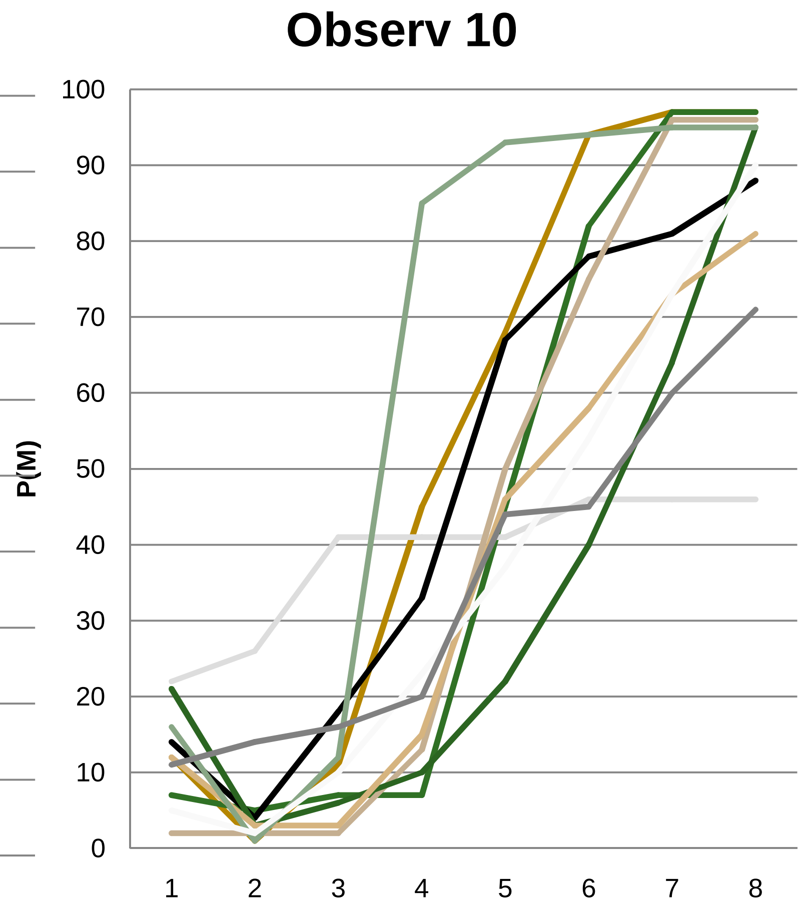
- Cadre : service de pédiatrie, décision concernant le traitement des enfants entre 3 mois et 3 ans présentant une fièvre, utilisation routinière d'un marqueur (CRP)
- Données recueillies : probabilités subjectives sur la présence d'un Infection Bactérienne Sévère (avant et après les résultats du test) sur des cas hypothétiques
- 10 pédiatres, 10 cas, 7 intervalles de valeur du marqueur

Nature des probabilités subjectives recueillies

- Avant : Proba(IBS|Observation)
- Après : Proba(IBS|Observation, Valeur du marqueur)

Exemple de probabilités subjectives recueillies





Ratio de vraisemblance implicite

- On ne sait pas si les médecins sont bayésiens et même s'ils le sont, comment connaître leurs probabilités conditionnelles

Proba(Valeur du marqueur|Observation,IBS) ?

- On peut calculer un ratio de vraisemblance implicite

- Pr(Marqueur dans intervalle i|Obs,IBS)/Pr(Marqueur dans l'intervalle i|Obs,pas IBS)

Ratio de vraisemblance implicite

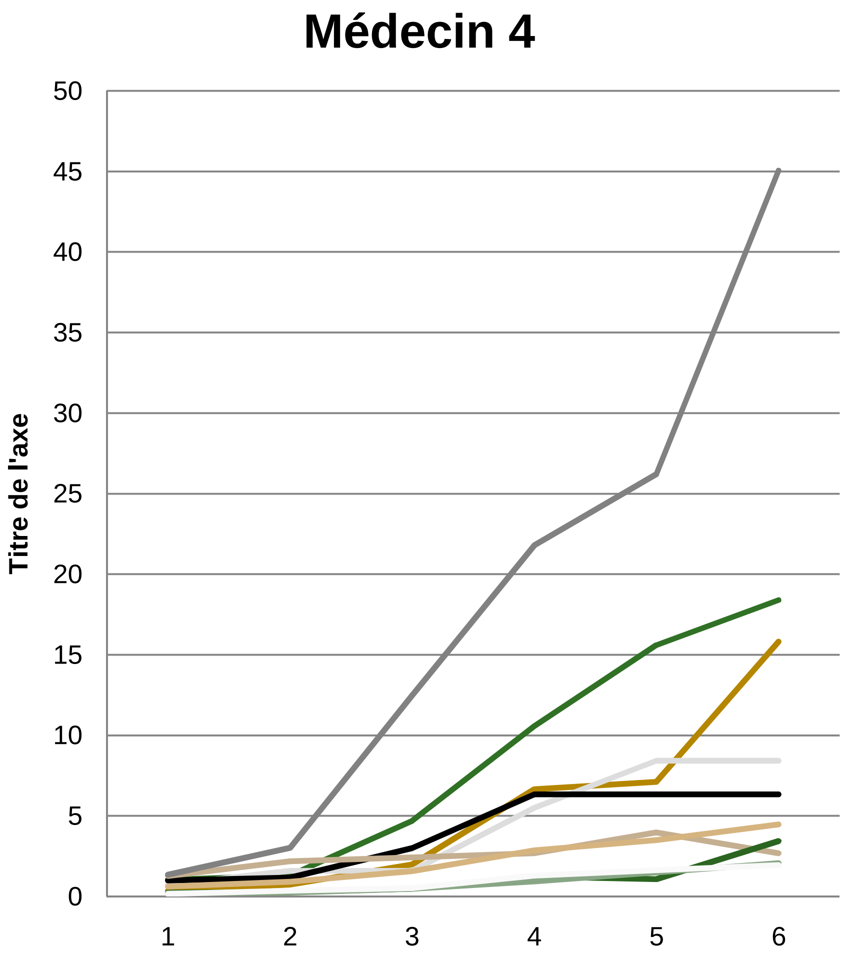
- Pr(Marqueur dans intervalle i|IBS)/Pr(Marqueur dans l'intervalle i|pas IBS)

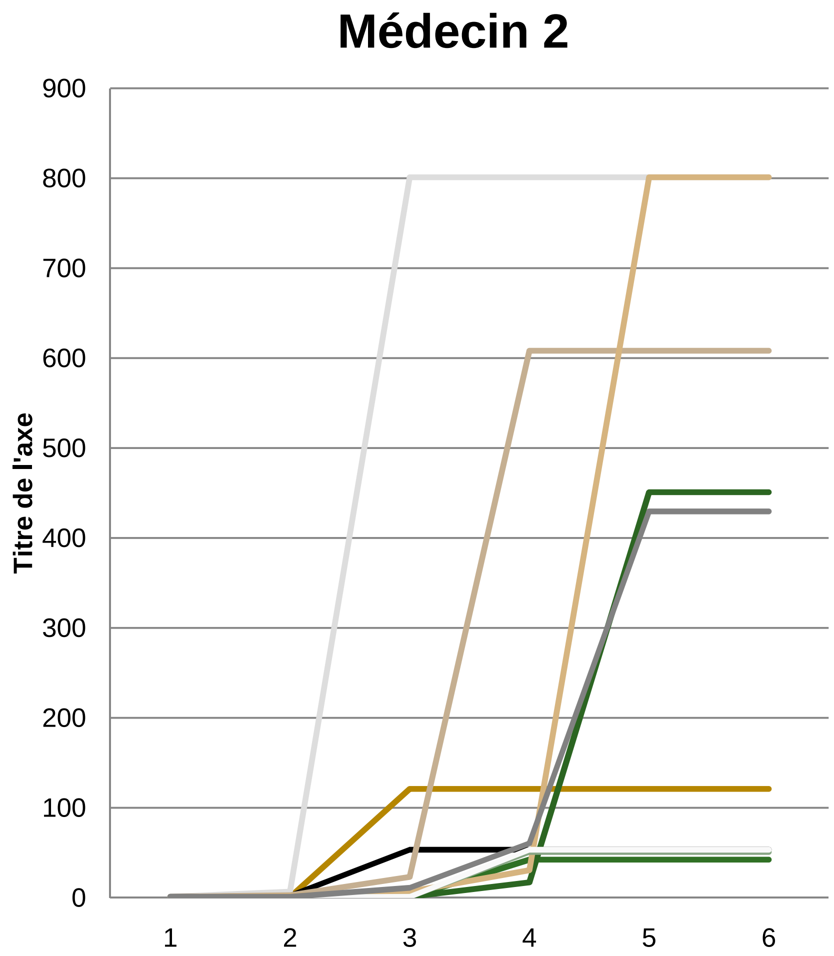
  = Pr(IBS|Marqueur dans intervalle i)Pr(pas IBS)/Pr(pas IBS|Marqueur dans intervalle i)Pr(IBS)

- Si ce ratio est très différent de 1 (plus petit ou plus grand), cela signifie que le médecin juge cette information précise

- Donne une mesure de l'utilisation de l'information apportée par le marqueur

Exemple pour deux médecins





Recueil d'exercices sur la valeur de l'information

EXERCICE *(Tiré de l'examen 2003)* ***Bien irriguer et s'informer***

Vous êtes un producteur de maïs dans le sud-ouest, culture qui réclame beaucoup d'eau. On peut distinguer deux périodes dans le développement du maïs et la production finale par ha est égale à

$$m = 100 - \frac{1}{100000}[(2000 - q_1)^2 + (3000 - q_2)^2]$$

où q_t représente la quantité d'eau totale apportée par ha pendant la période t, mesurée en m^3. Cet apport peut venir des précipitations naturelles p_t ou de l'irrigation i_t, c'est-à-dire, $q_t = p_t + i_t$. Les précipitations sont aléatoires avec deux valeurs équiprobables 1000 ou 2000 pour p_1 et trois valeurs équiprobables 1000, 2000 ou 3000 pour p_2. Les précipitations p_1 et p_2 sont des variables aléatoires indépendantes. On suppose que le niveau d'irrigation est une variable de choix qui peut être décidée à chaque période en connaissant le niveau de précipitation de la période (mais pas celui de la période suivante). Mais les contraintes de disponibilité d'eau pour l'irrigation font qu'il n'est pas possible de faire un apport supérieur à $1500m^3$ par ha au total, c'est-à-dire $i_1 + i_2 \leq 1500$.

1 Si l'irrigation n'était pas possible, quelle serait la distribution de probabilités sur la production par ha et quelle serait la production moyenne?

2 Quelle est la politique d'irrigation optimale sachant que vous cherchez à maximiser le rendement espéré par ha?

Quelle est la distribution de probabilités sur la production par ha et quelle est la production moyenne?

[Quelques tuyaux pour l'irrigation:

-si $p_2 = 3000$, il est optimal de ne pas irriguer en deuxième période ($i_2 = 0$)

-si $p_1 = 2000$, il est optimal de ne pas irriguer en première période ($i_1 = 0$). Dans ce cas, il est optimal d'irriguer au maximum en deuxième période si $p_2 = 1000$, d'irriguer $i_2 = 1000$ si $p_2 = 2000$.

-il n'est jamais optimal d'irriguer en première période pour plus de 1000m^3.

- le seul cas qui demande un calcul est lorsque $p_1 = 1000$. On pourra calculer une fonction valeur (en fonction de i_1) en distinguant le cas $i_1 < 500$ du cas $i_1 > 500$, et la maximiser pour trouver la valeur optimale de i_1.]

Au moment de décider du niveau d'irrigation en première période, il est possible d'obtenir des prévisions météorologiques de long terme. Celles-ci indiquent avec certitude si p_2 sera élevée, c'est à dire égale à 3000 ou plus faible, c'est à dire 1000 ou 2000.

3 Quelle est la politique d'irrigation optimale si on utilise cette information? Quelle est la distribution de probabilités sur la production par ha et quelle est la production moyenne?

4 Comment sont affectés les résultats si la contrainte sur l'irrigation devient $i_1 + i_2 \leq 1000$?

5 Commentez les résultats obtenus.

CORRIGE

1) Avec probabilité $\frac{1}{6}$:

- $p_1 = 1000, p_2 = 1000$ et $m = 50$
- $p_1 = 1000, p_2 = 2000$ et $m = 80$
- $p_1 = 1000, p_2 = 3000$ et $m = 90$
- $p_1 = 2000, p_2 = 1000$ et $m = 60$
- $p_1 = 2000, p_2 = 2000$ et $m = 90$
- $p_1 = 2000, p_2 = 3000$ et $m = 100$

soit en moyenne *63,33*

2) Dans le cas où $p_1 = 2000$, on choisit $i_1 = 0$ et si

- $p_2 = 1000, i_2 = 1500$ et $m = 97,5$
- $p_2 = 2000, i_2 = 1000$ et $m = 100$
- $p_2 = 3000, i_2 = 0$ et $m = 100$.

Dans le cas où $p_1 = 1000$, si on choisit $i_1 < 500$, si

- $p_2 = 1000, i_2 = 1500 - i_1$ et $m = 100 - \frac{(1000-i_1)^2+(500+i_1)^2}{100000}$
- $p_2 = 2000, i_2 = 1000$ et $m = 100 - \frac{(1000-i_1)^2}{100000}$
- $p_2 = 3000, i_2 = 0$ et $m = m = 100 - \frac{(1000-i_1)^2}{100000}$

donc conditionnellement à $p_1 = 1000$, le rendement espéré est

$$100 - \frac{(1000-i_1)^2}{100000} - \frac{1}{3}\frac{(500+i_1)^2}{100000}$$

Cette fonction est croissante en i_1 sur l'intervalle $[0, 500]$
Dans le cas où $p_1 = 1000$, si on choisit $1000 \geq i_1 > 500$, si

- $p_2 = 1000, i_2 = 1500 - i_1$ et $m = 100 - \frac{(1000-i_1)^2+(500+i_1)^2}{100000}$
- $p_2 = 2000, i_2 = 1500 - i_1$ et $m = 100 - \frac{(1000-i_1)^2+(-500+i_1)^2}{100000}$
- $p_2 = 3000, i_2 = 0$ et $m = m = 100 - \frac{(1000-i_1)^2}{100000}$

donc conditionnellement à $p_1 = 1000$, le rendement espéré est

$$100 - \frac{(1000-i_1)^2}{100000} - \frac{1}{3}\frac{(500+i_1)^2}{100000} - \frac{1}{3}\frac{(-500+i_1)^2}{100000}$$

Cette fonction atteint son maximum en $i_1 = 600$.
Donc il est optimal dans le cas où $p_1 = 1000$ d'irriguer au niveau $i_1 = 600$ et si

- $p_2 = 1000, i_2 = 900$ et $m = 86,3$
- $p_2 = 2000, i_2 = 900$ et $m = 98,3$
- $p_2 = 3000, i_2 = 0$ et $m = m = 98,4$

En moyenne, la production est de $96,75$.

3) On peut conditionner i_1 sur l'information.

Dans le cas où $p_1 = 1000$, si on apprend que $p_2 = 3000$ alors on choisit $i_1 = 1000$.

Dans le cas où $p_1 = 1000$, si on apprend que $p_2 = 1000$ ou 2000, alors conditionnellement à ces informations le rendement espéré est si on choisit $i_1 < 500$

$$100 - \frac{(1000 - i_1)^2}{100000} - \frac{1}{2}\frac{(500 + i_1)^2}{100000}$$

le maximum est en $i_1 = 500$,

et si on choisit $1000 \geq i_1 > 500$,

$$100 - \frac{(1000 - i_1)^2}{100000} - \frac{1}{2}\frac{(500 + i_1)^2}{100000} - \frac{1}{2}\frac{(-500 + i_1)^2}{100000}$$

avec un maximum en 500.

Donc au total si $p_1 = 1000$

- $p_2 = 1000, i_1 = 500, i_2 = 1000$ et $m = 87,5$
- $p_2 = 2000, i_1 = 500, i_2 = 1000$ et $m = 97,5$
- $p_2 = 3000, i_1 = 1000, i_2 = 0$ et $m = 100$

En moyenne, la production est de $97,03$.

EXERCICE 1 *Information et irréversibilité dans un choix d'actif*

On considère un problème de choix de portefeuille.

A la date 0 :

- Il peut choisir d'investir dans un actif qui lui rapportera de manière certaine 2 Euro à la date 2 pour chaque Euro investi. L'argent investi dans cet actif est bloqué jusqu'à la date 2.

- Il peut aussi choisir de garder de l'argent liquide de la date 0 à la date 1 et de la date 1 à la date 2, mais cet argent liquide ne rapporte rien, c'est à dire qu'un Euro conservé en liquidité reste un Euro à la période suivante.

- A la date 1, il peut investir dans un actif risqué: s'il investi x Euro dans cet actif, cet actif rapport $\alpha\sqrt{x}$ Euro. α peut prendre deux valeurs, soit $\alpha_1 = 20$, soit $\alpha_2 = 0$. Les deux valeurs sont équiprobables.

L'agent est contraint d'investir un montant positif dans les actifs. Il possède 100 Euro initialement. Son objectif est de maximiser son espérance de la richesse qu'il possèdera à la date 2.

1) S'il n'obtient pas d'information supplémentaire d'ici la date 1, quel est son comportement optimal d'investissement? Calculer l'espérance de gain maximale qu'il obtient alors.

Entre la date 0 et la date 1, l'agent va apprendre la valeur exacte de α.

2) Supposons que l'agent conserve un montant l en liquidités jusqu'à la date 1, quel est son choix optimal d'investissement à la date 1 en fonction du signal reçu?

3) Quel est son choix optimal d'investissement à la date 0? Quelle est son espérance de gain? S'il devait payer pour cette information, quel montant maximal accepterait-il de payer?

4) Commenter les résultats.

Correction exercice 1

1) Soit x le montant investi en actif sans risque à la date 0, y le montant investi en actif risqué à la date 1 et z le montant conservé en liquidité jusqu'à la date 2. $x, y, x \geq 0$ avec $x + y + z = 100$.

L'espérance de gain est égale à

$$2x + (\frac{1}{2}20 + \frac{1}{2}0)\sqrt{y} + z$$

La solution optimale est $x = 93,75$, $y = 6,25$, $z = 0$ avec une espérance de gain de $212,5$.

2) Si l'agent conserve un montant l en liquidités jusqu'à la date 1, il a investi $x = w_0 - l$ en actif sans risque à la date 0. Soit y le montant investi en actif risqué à la date 1 et z le montant conservé en liquidité jusqu'à la date 2. $y, z \geq 0$ avec $y + z = l$. Si la valeur est α_1, le gain espéré est égal à

$$2x + 20\sqrt{y} + z$$

Il s'agit donc de maximiser

$$\underset{y}{Max} \left[2x + 20\sqrt{y} + (l - y)\right]$$

sous $y \leq l$.

La solution optimale est

$$y = Min(100, l) = l$$

et son gain conditionnel espéré est

$$2(100 - l) + 20\sqrt{l}$$

Si la valeur est α_2, le gain espéré est égal à

$$2x + z$$

et donc il est optimal de choisir $y = 0$ et $z = l$.

3) Le gain espéré par rapport à l est:

$$2(100 - l) + \frac{1}{2}\left(20\sqrt{l} + l\right)$$

La solution optimale est $l = 100/9$ et l'espérance de gain est de $200 + 100/3$. Le gain d'espérance est de $200 + 100/3 - 212,5$ soit $125/6$.

1 Euro payé pour de l'information coute 2 Euro en espérance de gain. Par conséquent, il est prêt à payer au plus $125/12$ Euro.

Exercice Un docteur a à sa disposition deux médicaments contre une même maladie. Le médicament A qu'il connait bien a un taux de succès de 50%. Le médicament B, qui est nouveau sur le marché a un taux de succès encore inconnu. La moitié des essais cliniques a trouvé un succès de 80%, l'autre moitié a trouvé un taux de succès de 10% seulement. Cette différence peut être due à des propriétés non identifiées des populations testées.

Le médecin souhaite maximiser le nombre espéré de patients guéris. Montrer que s'il fait face à un unique patient, il préfère utilisé le médicament A. Quelle est sa stratégie optimale s'il fait face à deux patients?

Exercice

Il s'agit de conseiller un chasseur de trésor dans ses recherches. Le problème est le suivant:

- un trésor a été caché dans une caverne sous-marine,

- a priori, il y a deux zones où ce trésor a pu être caché: dans la zone A, on sait qu'il y a *3* cavernes sous marine, dans la zone B, il y en a 4,

- en termes probabilistes, les deux zones sont équiprobables et au sein de chaque zone, les cavernes sont également équiprobables.

1) Sachant que le chasseur ne peut faire qu'une seule tentative dans une caverne (contrainte imposée par ses moyens en oxygène), que lui conseillerez-vous pour maximiser ses chances?

Le chasseur a des phoques apprivoisés. Un phoque peut permettre une prospection préalable. En effet, les phoque sont affamés et si un phoque est laché sur une zone, il plongera vers une caverne pour attraper un congre. Mais une fois rassasié, le phoque ne replonge plus. La direction prise par le phoque donne l'information sur la caverne vers laquelle le phoque va trouver un congre. Quand plusieurs congres sont disponibles, le phoque choisit de manière équiprobable. S'il n'y a aucun congre dans aucune caverne, le phoque ne plonge pas. Si plusieurs phoques plongent simultanément en direction de la même caverne, un seul phoque mange le congre et les autres replongent ensuite vers une autre caverne si il reste des congres sur la zone. Quand les phoques sont lachés simultanément, leur comportement est indépendant.

Une fois les phoques utilisés, le chasseur effectue sa tentative.

Or initialement, pour les deux zones, il y a un congre dans chaque caverne où il n'y a pas le trésor. Dans la caverne où il y a le trésor, il n'y a pas de congre.

2) Si le chasseur a un seul phoque, où lui conseillez-vous de lâcher le phoque? Quel surcroît de probabilité cela permet?

3) Si le chasseur a deux phoques, que lui conseillez-vous? (les lacher simultanément ou séquentiellement?, sur quelle zone?...) Quel surcroît de probabilité l'utilisation de deux phoques permet? Traiter le cas où le chasseur a trois phoques.

Exercice

Choix irréversible et information

Un agent fait face à un problème de décision séquentiel dans un contexte d'incertitude. Deux états du monde sont possibles, s_1 et s_2, et ils sont équiprobables: $p(s_1) = p(s_2) = 1/2$. L'agent doit choisir une première fois en première période entre deux actes x et y et doit de nouveau choisir en seconde période dans un ensemble de choix qui est conditionnel à son choix initial : s'il choisit x en première période, il a le choix entre x et y en seconde période, s'il choisit y en première période, il est contraint de choisir y également en seconde période. (On peut par exemple interpréter ces choix comme des choix technologiques, le choix de la technologie x en première période permettant d'en changer en seconde période, ce que ne permet pas le choix de y). L'agent cumule les gains sur les 2 périodes et son objectif est de maximiser l'espérance de ces gains cumulés. Les technologies rapportent les gains suivants en cas d'adoption:

	Période 1	Période 2
x	0	7 si s_1 et 0 si s_2
y	2	2 si s_1 ou s_2

Entre la première et la deuxième période, l'agent reçoit de l'information. On considère les 4 situations d'information suivantes :

a) l'absence d'information,

b) l'information parfaite,

c) une structure d'information bruitée $M = \{m_1, m_2\}$ avec les corrélations entre signaux et états du monde $p(m_1 \mid s_1) = \frac{4}{7}$, $p(m_1 \mid s_2) = \frac{3}{7}$

d) une structure d'information bruitée $M^* = \{m_1^*, m_2^*\}$ avec les corrélations entre signaux et états du monde $p(m_1^* \mid s_1) = \frac{11}{14}$, $p(m_1^* \mid s_2) = \frac{3}{14}$.

1) Comparer les structures M et M^* en termes de finesse statistique.

2) Quel est le comportement optimal de l'agent dans les situations a) et b) ?

3) Calculer les probabilités $p(s_1 \mid m_1)$, $p(s_1 \mid m_2)$, ainsi que $p(s_1 \mid m_1^*)$, $p(s_1 \mid m_2^*)$, et les probabilités d'obtenir les différents messages. En déduire, conditionnellement au message reçu, le choix optimal de seconde période.

4) Quel est le comportement optimal de l'agent dans les situations c) et d) ? Calculez la valeur de l'information dans ces cas.

Commentez succinctement les résultats trouvés.