Valeur de l'information dans une situation multi-agents

Cours Incertitude, temps et information

Plan

- Introduction
- Traitement formel du problème des « muddy children »
- Common knowledge
- Information, source d’échange
- Valeur de l’information

Hirshleiffer effect

- Ref

Hirschleifer AER 1971 "The Private and Social Value of Information and the Reward to Inventive Activity"

- Exemple l’information réduit les possibilités de mutualisation des risques

The muddy children puzzle

Muddy children puzzle

" A number, say n, of children are standing in a circle around their father. There are k ($1 =< k =< n$) children with mud on their heads. The children can see each other but they cannot see themselves. In particular they do not know if they themselves have mud on their heads. There is no communication between the children. The children all attended a course on epistemic logic and they can reason with this in a perfect way. Furthermore, they are perfectly honest and do not cheat. Now Father says aloud: 'There is at least one child with mud on its head. Will all the children who know they have mud on their heads please step forward?' In case $k > 1$, no child steps forward. Father repeats his question. If $k > 2$, again the children show no response. This procedure is repeated until, after the k-th time Father has asked the same question, all muddy children miraculously step forward.

Traitement formel : représentation des croyances dans un espace d'états du monde

Considère un ensemble d'états du monde. Le but est que ces états du monde décrivent exhaustivement la situation matérielle, les croyances des enfants sur la situation matérielle, les croyances des enfants sur les croyances des autres....

On traite le cas de $n = 3$ (3 enfants) et de $k = 3$ (les 3 ont des visages sales) et on introduit un ensemble de 8 états du monde :

$$W = \{111, 110, 101, 100, 011, 010, 001, 000\}$$

En terme de description matérielle : l'état 111 signifie que les 3 enfants ont un visage sale, l'état 110 signifie que les 2 premiers enfants ont un visage sale mais pas le troisième....Pour représenter les croyances des enfants, on introduit des relations d'accessibilité

$$H_i : W \to 2^W$$

qui indique en chaque état w, l'ensemble des mondes que l'enfant i croit possibles :

Les croyances initiales des enfants

$$\begin{aligned}
H_1(111) &= H_1(011) = \{111, 011\}, H_1(110) = H_1(010) = \{110, 010\}, \\
H_1(101) &= H_1(001) = \{101, 001\}, H_1(100) = H_1(000) = \{100, 000\}
\end{aligned}$$

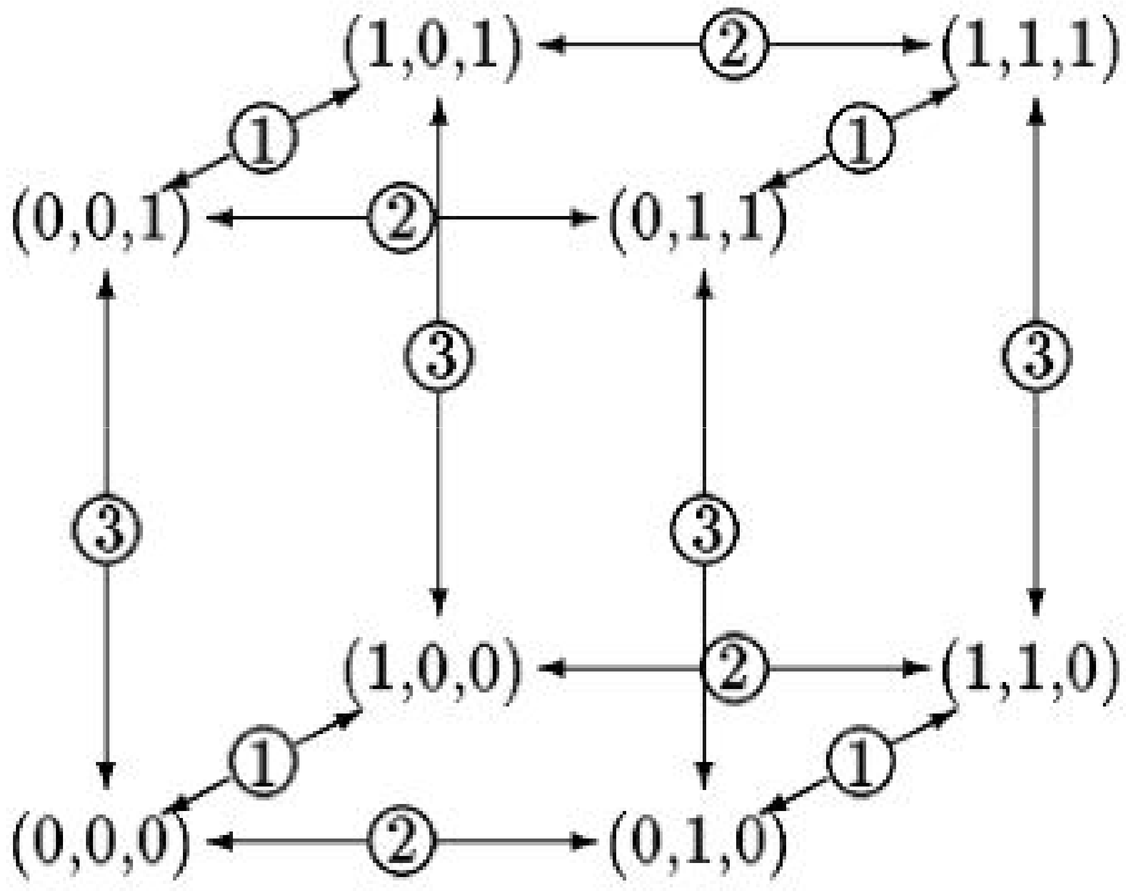
$$\begin{aligned}
H_2(111) &= H_2(101) = \{111, 101\}, H_2(110) = H_2(100) = \{110, 100\}, \\
H_2(011) &= H_2(001) = \{011, 001\}, H_2(010) = H_2(000) = \{010, 000\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_3(111) &= H_3(110) = \{111, 110\}, H_3(101) = H_3(100) = \{101, 100\}, \\
H_3(011) &= H_3(010) = \{011, 010\}, H_3(001) = H_3(000) = \{001, 000\}
\end{aligned}$$

Exemple :

- L'enfant n°1 ne distingue pas entre les états $1xx$ et $0xx$ (ne sait pas si son visage est sale mais voit le visage des deux autres).
- L'enfant n°1 sait que l'enfant n°2 ne distingue pas soit entre entre les états $11x$ et $10x$ soit entre les états $01x$ et $00x$...

Représentation graphique



Information apportée par l'annonce du père

Par hypothèse, le vrai état du monde est 111. L'annonce du père est compatible avec tous les états du monde sauf le monde 000. Ce monde est éliminé des mondes possibles, on se restreint à

$$W^1 = \{111, 110, 101, 100, 011, 010, 001\}$$

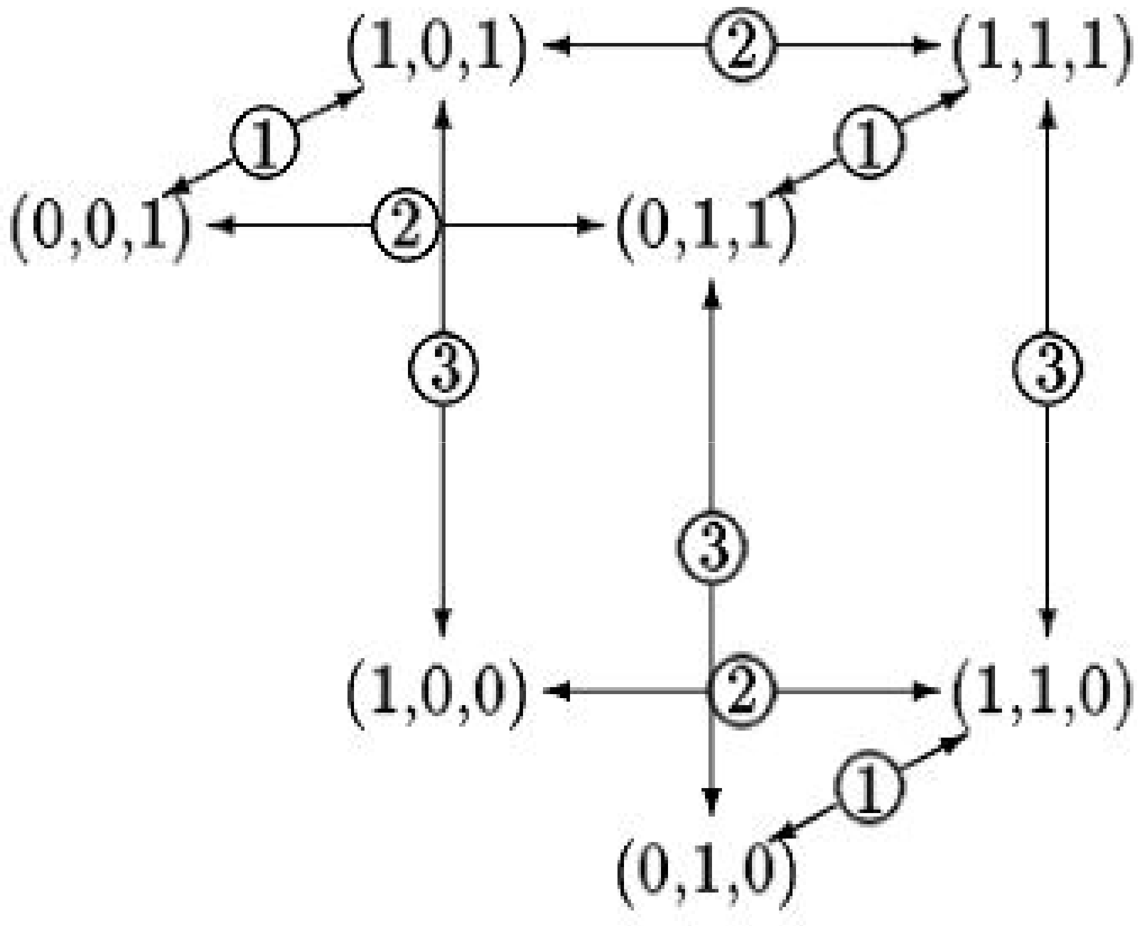
et les relations d'accessibilité deviennent H_i^1, coincidant avec H_i sauf pour

$$H_1^1(100) = \{100\}$$

$$H_2^1(010) = \{010\}$$

$$H_3^1(001) = \{001\}$$

Graphe après révision



Information apportée par le fait qu'aucun enfant ne sait…

Dans un monde où un seul des enfants a un visage sale, l'enfant qui a ce visage sale l'apprend par l'annonce du père : dans les états $100, 010, 001$ un des enfants s'avancerait, celui qui sait qu'il a un visage sale étant donné que les autres sont propres. Le fait qu'aucun enfant ne connaisse l'état de son visage indique à tous que les états possibles sont $111, 110, 101, 011$ (au moins 2 enfants ont un visage sale). On se restreint à

$$W^2 = \{111, 110, 101, 011\}$$

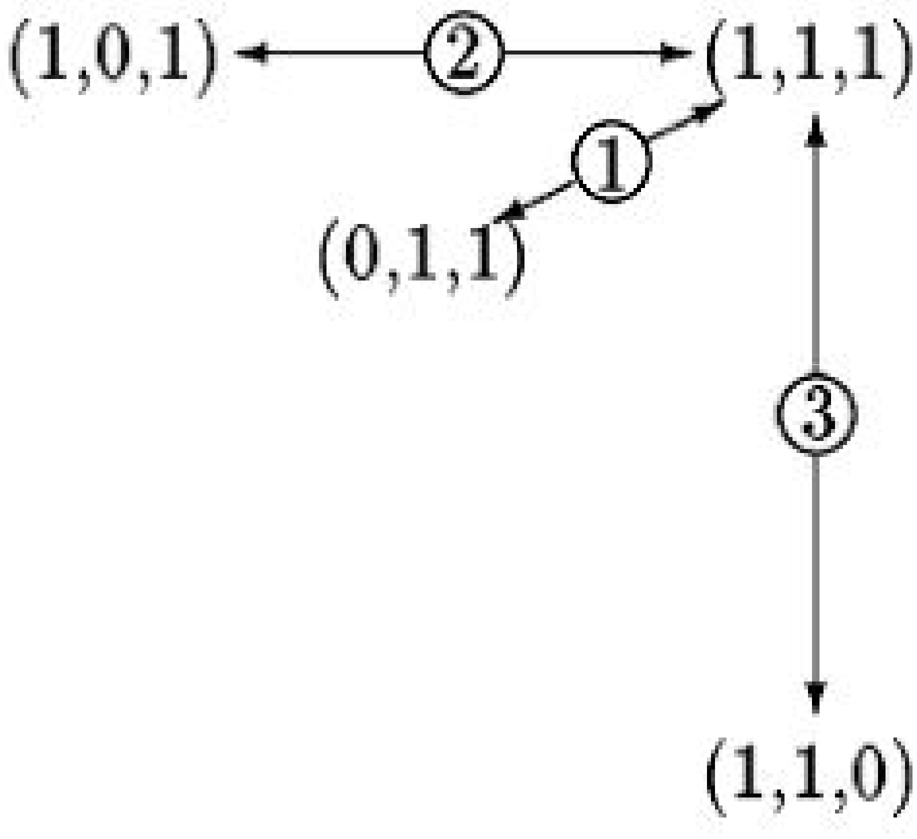
et les relations d'accessibilité deviennent H_i^2,

$$H_1^2(111) = H_1^2(011) = \{111, 011\}, H_1^2(110) = \{110\}, H_1^2(101) = \{101\}$$

$$H_2^2(111) = H_2^2(101) = \{111, 101\}, H_2^2(110) = \{110\}, H_2^2(011) = \{011\},$$

$$H_3^2(111) = H_3^2(110) = \{111, 110\}, H_3^2(101) = \{101\}, H_3^2(011) = \{011\}$$

Une fois que tous les enfants ont dit une première fois non



Information apportée par le fait que les enfants ne savent toujours pas…

Dans un monde où deux des enfants ont un visage sale, les enfants qui ont ces visages sales savent maintenant qu'ils ont un visage sale : ce sont les états $110, 101, 011$. Le fait qu'aucun enfant ne connaisse l'état de son visage indique à tous que le seul état possible est 111. On se restreint à

$$W^3 = \{111\}$$

et les relations d'accessibilité deviennent H_i^3,

$$H_1^3(111)\{111\}$$
$$H_2^3(111) = \{111\}$$
$$H_3^3(111) = \{111\}$$

Maintenant les trois enfants savent.

Fondements des modèles « sémantiques »

Ref :
En théorie des jeux :
Harsanyi « Games with incomplete information » (1967/1968),
Mertens-Zamir (1985)
Aumann (1976, 1999)

Chez les logiciens, connu comme les structures de Kripke (1959, 1963)

Common Knowledge (Belief)

- Informellement introduit par le philosophe David Lewis en 1970 (Convention)

« Tout le monde sait, tout le monde sait que tout le monde sait…. »

- Formellement défini par Aumann en sémantique (« We cannot agree to disagree » (1976))

Définition et caractérisation

Definition 1 *Un événement* $E \subset W$ *est* croyance commune (CB) *en* w *si pour tout* $r \in \mathbb{N}$ *et toute suite* $\{i_k\}_{k=1}^{k=r}$, $i_k \in I$, $H_{i_1}(H_{i_2}(\ldots(H_{i_r}(w))) \subset E$.

Dans un cadre partitionnel: $M(w)$ Meet des partitions: partition la plus fine parmi les partitions plus grossières que toutes les partitions des agents.

Proposition 1 *(i)* $M(w)$ *est CB en* w, *(ii)*$E \subset W$ *est* croyance commune *en* w *ssi* $M(w) \subset E$

Importance de la connaissance commune

- Ref : Rubinstein « Electronic mail games » (1989)
- Global Games : Carlsson-van Damme (1993) Morris – Shin (2003)

- Idée : certains équilibres ne sont pas robuste à une faible perturbation de l'information

Exemple

- Deux généraux doivent se coordonner pour attaquer simultanément une armée ennemie

- Deux situations possibles

Favorable

	Attaque	N'attaque pas
Attaque	1,1	-2,0
N'attaque pas	0,-2	0,0

Pas favorable

	Attaque	N'attaque pas
Attaque	-1,-1	-2,0
N'attaque pas	0,-2	0,0

Information

- Si connaissance commune de la situation, 2 équilibres en stratégies pures (1 Pareto dominant, 1 risque dominant) dans la situation favorable et 1 équilibre dans la situation pas favorable
- Information incomplète :
- A priori, les deux situations sont équiprobables
- Seul le général 1 découvre l'état de la situation. Elle est favorable.
- Ils ont convenu que dans ce cas, le général 1 envois un messager que le général 2 renverra et ainsi de suite…
- A chaque voyage le messager a une probabilité p faible de disparaître

Y aura-t-il une attaque?

- Non, quelque soit le nombre d’aller et retour du messager!

- Preuve : il faut décrire l’ensemble des mondes possibles et on constate par élimination itérée des stratégies dominées que les 2 généraux n’attaqueront jamais

Information incomplète, source d'échange?

- Un exemple : le jeux des enveloppes

Une grand mère décide de donner de l'argent à ses deux petits enfants. Elle jette un dé à 6 faces et fait deux chèques : sur le premier, elle met une somme de 10^n *Euros et sur le second* 10^{n+1} *Euros. Elle place les deux chèques dans deux enveloppes, les mélange et en donne une à chacun. Les petits enfants ouvrent leur enveloppe respective. La grand mère leur demande alors : "Voulez-vous échangez vos chèques? Si vous êtes tous les deux d'accord, il y a échange.*

Y-a-t'il des valeurs de n pour lesquels il y aura un échange?

Non! (Absence de spéculation…)

Réponse : Même si pour des valeurs $n = 1, 2, 3, 4, 5$ les petits enfants peuvent chacun se dire que le chèque de l'autre est soit d'un montant 10 fois plus élevé, soit d'un montant 10 fois plus faible et s'ils ne sont pas trop adverse au risque, considérer que l'échange vaut la peine, s'ils réfléchissent un peu, il ne devrait pas y avoir d'échange.

Traitement formel

Premier constat :

On peut observer que même s'ils sont prêt à échanger, ceci n'est pas croyance commune.

- Introduit une structure de représentation des croyances avec probabilités.

$$W = \{(n, n+1)_{n=1,..,n}, (n+1, n)_{n=1,..,n}\}$$

$(n, n+1)$ est l'état où le premier à 10^n E et le second 10^{n+1} E, les relations d'accessibilité sont

$$\begin{aligned}
H_1((n, n+1)) &= H_1((n, n-1)) = \{(n, n+1), (n, n-1)\}, \text{ pour } n = 2, 3, ..., 6 \\
H_1((1, 2)) &= \{(1, 2)\}, H_1((7, 6)) = \{(7, 6)\}, \\
H_2((n+1, n)) &= H_1((n-1, n)) = \{(n, n+1), (n, n-1)\}, \text{ pour } n = 2, 3, ..., 6 \\
H_2((2, 1)) &= \{(2, 1)\}, H_1((6, 7)) = \{(6, 7)\},
\end{aligned}$$

Traitement formel

et en chacun des mondes, les deux petits enfants ont une distribution de probabilité sur les monde qu'il croit possible :

$$
\begin{aligned}
\text{pour } n &= 2,3,...,6 \\
p_1^{(n,n+1)}((n,n+1)) &= p_1^{(n,n+1)}((n,n-1)) = p_1^{(n,n-1)}((n,n+1)) = p_1^{(n,n-1)}((n,n-1)) = 1/2, \\
p_1^{(1,2)}((1,2)) &= 1, p_1^{(7,6)}((7,6)) = 1 \\
\text{pour } n &= 2,3,...,6 \\
p_2^{(n+1,n)}((n+1,n)) &= p_2^{(n+1,n)}((n-1,n)) = p_2^{(n-1,n)}((n+1,n)) = p_2^{(n-1,n)}((n-1,n)) = 1/2 \\
p_2^{(2,1)}((2,1)) &= 2, p_2^{(6,7)}((6,7)) = 1
\end{aligned}
$$

Traitement formel

- Admettons que les deux petits enfants calculent en espérance de gain et sont prêt à échanger s'ils estiment que la valeur espérée du chèque de l'autre est supérieur à la valeur du leur. C'est par exemple le cas pour 1 en $(n, n+1), (n, n-1)$ pour $n = 2, 3, ..., 6$ puisque

$$\begin{aligned} & p_1^{(n,n+1)}\left((n, n+1)\right).10^{n+1} + p_1^{(n,n+1)}\left((n, n-1)\right).10^{n-1} \\ = \; & 1/2.10^{n+1} + 1/2.10^{n-1} > 10^n \end{aligned}$$

Traitement formel

Donc si on note e_i la proposition,i est prêt à un échange, on a que: e_1 est vrai dans tous les mondes sauf $(7,6)$, e_2 est vrai dans tous les mondes sauf $(6,7)$

$$|e_1| = W \setminus \{(7,6)\}, |e_2| = W \setminus \{(6,7)\}, |e_1 \wedge e_2| = W \setminus \{(7,6),(6,7)\}$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} |\mathbf{b}_1 (e_1 \wedge e_2)| &= W \setminus \{(7,6),(6,7),(6,5)\} \\ |\mathbf{b}_2 (e_1 \wedge e_2)| &= W \setminus \{(7,6),(6,7),(5,6)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 (e_1 \wedge e_2)| &= W \setminus \{(7,6),(6,7),(5,6),(6,5),(5,4)\} \\ |\mathbf{b}_2\mathbf{b}_1 (e_1 \wedge e_2)| &= W \setminus \{(7,6),(6,7),(6,5),(5,6),(4,5)\} \end{aligned}$$

etc...et on observe que dans aucun état $e_1 \wedge e_2$ n'est croyance commune. (Pas de croyance commune qu'ils sont conjointement d'accord pour échanger).

Traitement formel

Second constat : Pourquoi n'y aura-t'il pas d'échange?

On peut raconter le raisonnement itéré de chacun :

- dans l'état $(7, 6)$, 1 refuse l'échange et dans l'état $(6, 7)$, 2 refuse l'échange,
- dans les états $(6, 7)$ et $(6, 5)$, sachant que 2 refuse l'échange dans l'état $(6, 7)$, 1 devrait refuser l'échange et par un raisonnement similaire, 2 devrait refuser l'échange dans les états $(7, 6)$ et $(5, 6)$,
- dans les états $(5, 6)$ et $(5, 4)$, sachant que 2 refuse l'échange dans l'état $(5, 6)$, 1 devrait refuser l'échange et par un raisonnement similaire, 2 devrait refuser l'échange dans les états $(6, 5)$ et $(4, 5)$, etc...

Traitement formel

Pour traduire formellement ce raisonnement, on peut considérer l'équilibre de Nash du jeu proposé par la grand mère : spécification de la stratégie jouée (Refuse ou Accepte) par les petits enfants en chaque monde, en chaque monde la stratégie jouée doit être une meilleure réponse à la stratégie de l'autre étant donné ses croyances. Il ne peut pas y avoir d'équilibre où dans un monde les deux petits enfants acceptent tous les deux.

- Supposons par exemple par l'absurde qu'il y a un échange dans l'état $(1,2)$.
- Ceci n'est possible que s'il y a un échange dans l'état $(3,2)$, sinon Accepter pour 2 n'est pas une bonne réponse en $(1,2)$.
- Ceci n'est possible que s'il y a un échange dans l'état $(3,4)$, sinon Accepter pour 1 n'est pas une bonne réponse en $(3,2)$.
- Ceci n'est possible que s'il y a un échange dans l'état $(5,4)$, sinon Accepter pour 2 n'est pas une bonne réponse en $(3,4)$.
- Ceci n'est possible que s'il y a un échange dans l'état $(5,6)$, sinon Accepter pour 1 n'est pas une bonne réponse en $(5,4)$.
- Ceci n'est possible que s'il y a un échange dans l'état $(7,6)$, sinon Accepter pour 2 n'est pas une bonne réponse en $(5,6)$, et ceci n'est pas possible puisque 1 refuse l'échange dans l'état $(7,6)$.

We cannot agree to desagree

Le résultat de Aumann. "*On ne peut pas être d'accord sur le fait que l'on est en désaccord*".

Hypothèse : se place dans une structure partitionnelle avec des probabilités, sous l'hypothèse de Common Prior.

On considère un modèle (W, H_i, p), les probabilités de l'agent i en un monde w sont données par :

$$p_i^w(E) = p\left(E \middle| H_i(w)\right) = \frac{p(E \cap H_i(w))}{p(H_i(w))}$$

Résultats de Aumann

Proposition 2 *Soit $E \subset W$. Si en un monde $w \in W$, les probabilités $p_1^w(E)$ et $p_2^w(E)$ sont croyances communes entre l'agent 1 et l'agent 2, alors $p_1^w(E) = p_2^w(E)$.*

Preuve. Appelons $F_i = \left\{w', p_i^{w'}(E) = p_i^w(E)\right\}$. Les probabilités $p_1^w(E)$ et $p_2^w(E)$ croyances communes entre l'agent 1 et l'agent 2 signifie que les F_i sont croyances communes en w et donc que $M(w) \subset F_i$. Par conséquent, pour tout $w' \in M(w)$,

$$p_i^{w'}(E) = \frac{p(E \cap H_i(w'))}{p(H_i(w'))} = p_i^w(E)$$

Or les $H_i(w')$, $w' \in M(w)$, forment une partition de $M(w)$. Par conséquent

$$\frac{p(E \cap M(w))}{p(M(w))} = p_i^w(E)$$

(si $\frac{p(E\cap A)}{p(A)} = \frac{p(E\cap B)}{p(B)}$ pour A et B disjoint, alors $\frac{p(E\cap(A\cup B))}{p(A\cup B)} = \frac{p(E\cap A)}{p(A)}$)

Par conséquent $p_1^w(E) = p_2^w(E)$. ■

Extension : No Trade Theorem

- Ref : Milgrom Stockey « Information, trace and common knowledge » (1982)

- Pour justifier l'existence d'échange dont la source provient d'asymétrie d'information, la littérature en finance considère des « noisy trader » Kyle (1985)

Valeur de l'information

Example 1 *Assurance et information*

Probabilité q *d'être à haut risque avec probabilité* $\overline{\pi}$ *de perte* L *et probabilité* $(1-q)$ *d'être à bas risque avec probabilité* $\underline{\pi}$ *de perte* L, $\overline{\pi} > \underline{\pi}$. *Richesse initiale* w_0. *On suppose que les assureurs sont en situation de concurrence et tarifie selon une prime actuarielle.*

Cas 1 : Absence d'information : Si les assurés ne savent pas leur type, haut ou bas risque, alors leur probabilité de perte est $q\overline{\pi} + (1-q)\underline{\pi}$ *, la prime payée est* $(q\overline{\pi} + (1-q)\underline{\pi})\, L$ *et leur niveau d'utilité est*

$$U(w_0 - (q\overline{\pi} + (1-q)\underline{\pi})\, L)$$

Cas 2 : Information privée : Les assurés peuvent pratiquer un test qui leur permet d'apprendre leur type. Cette information n'est pas divulguée aux assureurs. Supposons qu'ils le pratiquent tous. Equilibre séparateur à la Rotschild-Stiglitz avec des hauts risques couverts totalement selon une prime $\overline{\pi}L$ *et des bas risques couverts partiellement (remboursement* P*) avec une prime actuarielle* $\underline{\pi}P$. *Le niveau d'utilité ex ante (avant information) est*

$$qU(w_0 - \overline{\pi}L) + (1-q)\left(\underline{\pi}U(w_0 - \underline{\pi}P - L + P) + (1-\underline{\pi})\, U(w_0 - \underline{\pi}P)\right)$$

Valeur de l'information

Cas 3 : Information publique : Comme précedemment la possibilité d'un test mais cette fois l'information est donnée aux assureurs. Les hauts risques sont couverts totalement selon une prime $\overline{\pi}L$ et les bas risques couverts totalement avec une prime actuarielle $\underline{\pi}L$. Le niveau d'utilité ex ante (avant information) est

$$qU(w_0 - \overline{\pi}L) + (1-q)\left(U(w_0 - \underline{\pi}L)\right)$$

Du fait de la concavité de U,

$$\begin{aligned} U\left(w_0 - \left(q\overline{\pi} + (1-q)\underline{\pi}\right)L\right) &> qU(w_0 - \overline{\pi}L) + (1-q)\left(U(w_0 - \underline{\pi}L)\right) \\ &> qU(w_0 - \overline{\pi}L) + (1-q)\left(\underline{\pi}U(w_0 - \underline{\pi}P - L + P) + (1-\underline{\pi})U(w_0 - \underline{\pi}P)\right) \end{aligned}$$

L'information sur les risques réduit les possibilités d'assurance.

Valeur de l'information

Example 2 *Quelques exemples de valeur d'information dans les jeux. (voir Bassan, Gossner, Scarsini, Zamir 2003 "Positive value of information in games" International Journal of Game Theory*

Considère des jeux 2x2 avec des stratégies dominantes. Des matrices de gains différentes selon si l'état est w_1 ou w_2. On considère trois situations différentes en termes de croyance/information $(W = \{w_1, w_2\}, H_i, p(w_1) = p(w_2))$.

- *Absence d'information :* $H_1^{AI}(w_1) = H_1^{AI}(w_2) = H_2^{AI}(w_1) = H_2^{AI}(w_2) = \{w_1, w_2\}$
- *Information privée pour le joueur 1 :* $H_1^{I1}(w_1) = \{w_1\}, H_1^{I1}(w_2) = \{w_2\}, H_2^{I1}(w_1) = H_2^{I1}(w_2) = \{w_1, w_2\}$
- *Information privée pour le joueur 2 :* $H_1^{I2}(w_1) = H_1^{I2}(w_2) = \{w_1, w_2\}, H_2^{I2}(w_1) = \{w_1\}, H_2^{I2}(w_2) = \{w_2\}$
- *Information publique :* $H_1^{IP}(w_1) = H_2^{IP}(w_1) = \{w_1\}, H_1^{IP}(w_2) = H_2^{IP}(w_2) = \{w_2\}$

Valeur de l'information

Un exemple de jeu de coordination :

$$\text{Dans état } w_1 \quad \begin{array}{ccc} & G & D \\ H & 2,2 & 0,0 \\ B & 0,0 & 0,0 \end{array} \quad \text{et dans } w_2 \quad \begin{array}{ccc} & G & D \\ H & 0,0 & 0,0 \\ B & 0,0 & 2,2 \end{array}$$

En l'absence d'info, revient à jouer : $\begin{array}{ccc} & G & D \\ H & 1,1 & 0,0 \\ B & 0,0 & 1,1 \end{array}$ *: deux équilibres* (H, G) *et* (B, D) *donnant* $(1, 1)$ *en moyenne.*

En info privée pour le joueur 1 : 1 *joue* H *en* w_1, B *en* w_2 *et* 2 *est indifférent entre* G *et* D *en* w_1 *et* w_2. *Gain moyen de* $(1, 1)$

En info publique : (H, G) *en* w_1, (B, D) *en* w_2.*Gain moyen de* $(2, 2)$.

Ici, l'info publique est profitable. Plus généralement, plus d'information est bon pour les agents dans des situations de coordination.

Valeur de l'information

Un autre jeu :

Dans état w_1
$$\begin{array}{c|cc} & G & D \\ \hline H & 2,2 & -1,-6 \\ B & -6,-1 & -2,-2 \end{array}$$
et dans w_2
$$\begin{array}{c|cc} & G & D \\ \hline H & -20,-20 & -5,-5 \\ B & -5,-5 & 2,2 \end{array}$$

En l'absence d'info, revient à jouer :
$$\begin{array}{c|cc} & G & D \\ \hline H & -9,-9 & -3,-5,5 \\ B & -5,5,-3 & 0,0 \end{array}$$
: équilibre (B, D) *donnant* $(0, 0)$ *en moyenne.*

En info privée pour le joueur 1 : 1 *joue* H *en* w_1, B *en* w_2 *et* 2 *joue* G *en* w_1 *et* w_2. *Gain moyen de* $(-1,75, -1,75)$ *Même gain moyen dans le cas info privée pour le joueur* 2.

En info publique : (H, G) *en* w_1, (B, D) *en* w_2.*Gain moyen de* $(2, 2)$.

Ici l'info publique est profitable mais pas l'info privée.

Valeur de l'information

Un dernier exemple où l'information n'est jamais bonne :

$$\text{Dans état } w_1 \quad \begin{array}{ccc} & G & D \\ H & 0,0 & 6,-3 \\ B & -3,6 & 5,5 \end{array} \quad \text{et dans } w_2 \quad \begin{array}{ccc} & G & D \\ H & -20,-20 & -7,-16 \\ B & -16,-7 & -5,-5 \end{array}$$

En l'absence d'info, revient à jouer : $\begin{array}{ccc} & G & D \\ H & -10,-10 & -0,5,-9,5 \\ B & -9,5,-0,5 & 0,0 \end{array}$ *: équilibre* (B,D) *donnant* $(0,0)$ *en moyenne.*

En info privée pour le joueur 1 : 1 *joue* H *en* w_1, B *en* w_2 *et* 2 *joue* G *en* w_1 *et* w_2. *Gain moyen de* $(-8,-3,5)$

En info publique : (H,G) *en* w_1, (B,D) *en* w_2.*Gain moyen de* $(-2,5,-2,5)$.

Apprentissage social

Modèle de diffusion de l'information privée par l'observation des actions

Ref : Banerjee (92) "A simple model of herd behavior" QJE

Bikhchandani, Hirshleifer, Welch (92) " A theory of fads....as informational cascades", JPE

Chamely Gale (94) "Information revelation and strategic delay in a model of investment" Econometrica

Gul Lundholm (95) JPE

Gale (96) What have we learned from social learning"

Smith et Sorensen (2000) Econometrica

Page Web de Welch

Chamley (2004) Rational herds

Un exemple simple de cascade informationnel

Deux états s et s deux actions a et a'

Même utilité pour tout le monde: $U(a,s) = U(a',s') = 1$ $U(a',s) = U(a,s') = -1$

Proba a priori $p(s) = p(s') = 1/2$

Chacun reçoit un signal privé iid $Y = y, y'$ avec $p(y|s) = p(y'|s') = q > 1/2$

Conditionnel à signal: $p(s|y) = p(s'|y') = \frac{1/2q}{1/2} = q$

$EU(a|y) = q - (1-q) = 2q - 1$

Les agents choisissent séquentiellement:

Un exemple simple de cascade informationnel

- Plusieurs histoires possibles
- Premier agent :

si signal y, choisit a

si signal y', choisit a'

- Si premier agent choisit a, second agent sait que signal de 1 est y

si son signal est y, choisit a

si son signal est y', alors $p(s|yy') = 1/2$ et il est indifférent. Supposons qu'il tire à Pile ou Face

Un exemple simple de cascade informationnel

- Si les 2 premiers agents ont choisit a, alors troisième sait que 1 a reçu y

si son signal est y, alors la probabilité conditionnelle pour cette histoire

$$p(s|H) > p(s|yy'y) = \frac{1/2q^2(1-q)}{1/2q^2(1-q)+1/2q(1-q)^2} = q$$

et il choisit a

Un exemple simple de cascade informationnel

- Si les 2 premiers agents ont choisit a, alors troisième sait que 1 a reçu y

si son signal est y',

$$p(s|yay') = \frac{1/2q(q+(1-q)1/2)(1-q)}{1/2q(q+(1-q)1/2)(1-q)+1/2(1-q)((1-q)+q1/2)q}$$

$$= \frac{(q+(1-q)1/2)}{(q+(1-q)1/2)+((1-q)+q1/2)} = \frac{(q+1)}{(q+1)+(-q+1)}$$

$$= \frac{q+1}{2} > 1/2$$

et donc il choisit a

Un exemple simple de cascade informationnel

- Si les deux premiers agents ont choisit a, alors quelque soient les signaux reçus par les agents suivants, tout le monde choisira a : cascade informationnelle

$$\text{Bonne cascade: } saaaaaa \text{ proba } 1/2q\,(q + (1-q)1/2)$$
$$\text{Mauvaise cascade : } s'aaaaaa \text{ proba } 1/2(1-q)\,((1-q) + q1/2)$$

- Plus généralement, une cascade démarre dès que deux agents successifs font la même chose

Inefficacité de l’apprentissage social?

- La diffusion de l’information privée est limitée
- Socialement, si grand nombre d’agents doivent choisir, il est préférable que les premiers ne disposent pas d’information publique sur les choix des précédents
- Dans des modèles où la séquentialité des choix est endogène, observe en plus d’un mimétisme éventuellement inefficace, des phénomènes d’attente eux aussi inefficaces.

Recueil d’exercices

Exercice 1 Variation sur les trois chapeaux

On reprend la situation des trois chapeaux, à savoir,

- 3 enfants dont les prénoms sont A, B, C portent un chapeau qui peut être de couleur Rouge ou Noire,

- les 3 enfants observent la couleur des chapeaux des deux autres enfants mais ne connaissent pas la couleur de leur chapeau,

- ils ne se communiquent pas entre eux,

- ils ont tous un chapeau rouge,

- une personne déclare aux trois enfants : "au moins l'un de vous a un chapeau rouge",

1) Les 3 enfants (enfants très intelligents par ailleurs et ceci est connaissance commune), doivent chacun à leur tour (dans l'ordre A puis B puis C puis de nouveau A...) annoncer si oui ou non ils connaissent la couleur de leur chapeau. Que vont annoncer successivement les enfants?

2) L'histoire est la même que précedemment sauf pour les points suivants:

- A porte un chapeau Rouge, B et C portent un chapeau Noir,

- A est bête, c'est à dire qu'il est incapable de faire des déductions logiques,
- B est intelligent mais il croît que A l'est aussi,
- C est intelligent, sait que A est bête, que B est intelligent et qu'il croît que A l'est aussi.

Que vont annoncer successivement les enfants?

Exercice 2 *Trois touristes ont été capturé par un gang très dangeureux. Le chef du gang leur annonce que leur sort va dépendre du résultat qu'ils obtiendront dans le jeu suivant suivant. Dans les dix prochaines minutes ils vont pouvoir se concerter ensemble. A l'issu de ce temps de concertation, on les placera en file les uns derrière les autres de façon à ce que le troisième voit la tête des deux premiers, le deuxième voit la tête du premier et le premier ne voit rien du tout. Le chef du gang placera des chapeaux sur la tête des deux premiers, ces chapeaux pourront être de couleur blanche ou noire, les deux chapeaux n'auront pas nécessairement la même couleur. Le touriste placé en troisième pourra crier soit A soit B. Puis les deux premiers touristes ont cinq minutes pour dire quel est la couleur de leur chapeau. Si les deux porteurs de chapeau réussissent à trouver sans se tromper la couleur de leur chapeau, alors les trois touristes sont capturés, sinon ils sont exécutés.*

1) Montrer que les trois touristes peuvent sauver leur vie à coup sûr.

On généralise le jeu à un nombre N de touristes capturés: Nième peut crier un signal et les N-1 premiers sont coiffés d'un chapeau.

2) Quel est le nombre minimal de signaux que doit avoir à sa disposition le Nième touriste pourqu'une libération soit assurée à coup sûr?

Exercice 3 *Vous vous rencontrez ce matin avec un ami et vous envisagez d'aller à la le soir à la pêche au filet (à 8h). Pour la pêche au filet, il faut nécessairement être deux auquel cela rapporte à chacun un gain de 2. Tout seul, le gain est nul. Par ailleurs, le fait de se rendre à la pêche est coûteux: cela coûte 1 à chacun qui se déplace Mais il y a de nombreuses incertitudes.*

Vous convenez de l'organisation suivante.

- *A midi, votre ami saura s'il est disponible pour la pêche et a priori, il y a 1 chance sur 2 qu'il soit disponible (en moyenne, son travaillui impose un soir de garde sur deux). S'il est disponible, il vous appelera à votre domicile et vous laissera un message sur votre répondeur.*
- *Vous consultez votre répondeur lorsque vous rentrez de votre travail à 18h. En cas de message, vous le rappelez chez lui pour lui laisser un message indiquant que vous avez bien reçu son message. Puis vous partez à 18h30. (C'est l'heure limite pour que vous puissiez aller à la pêche)*
- *Votre ami, rentre chez lui à 19h, consulte son répondeur et en cas de message part immédiatement lui aussi*

Le problème, c'est que vos répondeurs respectifs sont défaillant: le vôtre n'enregistre qu'un message sur 3 et l'autre que 2 messages sur 5.

Votre ami et vous même êtes des maximisateurs d'espérance de gain et ceci est connaissance commune entre vous.

1. *Montrer que le plan prévu entre vous ne sera pas exécuter car dans tous les cas, aucun d'entre vous n'ira à la pêche.*

2. *Est ce que si au lieu de simplement indiqué que vous avez bien reçu son message, vous ne téléphoniez que si vous partiez effectivement, cela améliorerait l'efficacité du plan?*

3. *En fait pour quels niveaux de défaillances des deux répondeurs, le plan serait crédible?*

   Avant d'aller voir votre ami, vous passez chez un voisin qui vous prête un répondeur qui fonctionne 4 fois sur 5. De ce fait, cela vous permet de remplacer l'un ou l'autre de vos deux répondeurs.

4. *Quel répondeur remplacer et quel plan crédible proposé pour maximiser*

   - *le gain espéré total?*
   - *votre gain espéré?*
   - *celui de votre ami?*

     Répondez à cette question en envisageant d'autres plans de communication (sous les contraintes d'organisation décrite plus haut).

Vous rencontrez donc votre ami avec le répondeur de rechange et il vous raconte qu'il a amélioré les performances de son répondeur qui fonctionne désormais 4 fois sur 5

5. *Que va-t'il vous proposer?*

Exercice 4 Valeur de l'information dans les jeux.

Deux joueurs s'affrontent dans un jeu 2x2, mais les gains dépendent de l'état de la nature θ_a *ou* θ_b.

Si l'état de la nature est θ_a *la matrice de gain est*

	G	D
H	2;2	-1;-6
B	-6;-1	-2;-2

et si l'état de la nature est θ_b *la matrice de gain est*

	G	D
H	-20;-20	-5;-5
B	-5;-5	2;2

La probabilité de chacun des états de la nature est $\frac{1}{2}$.

1) Au moment où ils jouent, aucun des 2 joueurs n'est informé et par conséquent, ils jouent selon la matrice des gains espérés

	G	D
H	-9;-9	-3;-5,5
B	-5,5;-3	0;0

Quel est l'unique équilibre de Nash?

2) Les 2 joueurs sont tous les 2 informés de l'état de la nature au moment où ils jouent (et c'est connaissance commune qu'ils le sont). Déterminer l'équilibre de Nash dans chacun des jeux et calculer les espérances de gains initiale des joueurs.

3) Au moment de jouer, un seul des 2 joueurs est informé (et cette situation d'information asymétrique est connaissance commune). Déterminer ce que vont jouer les joueurs et les gains espérés dans les 2 cas possibles :1 est informé, 2 est informé.

4) Est-ce que le fait d'être informé est avantageux dans ce jeu?

Exercice 5 *On considère un jeu à deux agents, A et B, qui se déroule en trois étapes :*

Etape 0: une carte Noire (N) ou Rouge (R) est tirée (par le meneur de jeu M) et retournée sans que les joueurs aient pu en voir la couleur. Chaque couleur est équiprobable.

Etape 1: Le joueur A annonce une couleur N ou R, cette annonce est communiquée au joueur B.

Etape 2: Le joueur B annonce une couleur N ou R.

Les gains sont les suivants: si les 2 joueurs annoncent la même couleur, alors chacun obtient 2, si les joueurs annoncent une couleur différente, celui qui a annoncé la bonne couleur obtient 5 et l'autre 0.

1) Montrer que les seuls équilibres de Nash possibles correspondent à une espérance de gain de 2,5 pour les 2 joueurs.

Par rapport au jeu de base, on introduit différentes variantes où le meneur de jeu informe les joueurs.

2) A l'issue de l'étape 0, M annonce au joueur A la couleur de la carte tirée. C'est une information privée (il est connaissance commune entre A et B que A dispose de l'information alors que B n'en dispose pas). Montrer qu'il y a alors un seul équilibre de Nash qui correspond à un gain certain de 2 pour les 2 joueurs.

3) Par rapport à la question 2, la situation est inversée: c'est le joueur B qui reçoit l'information privée sur la couleur de la carte. Montrer que les seuls équilibres de Nash possibles correspondent à un gain espéré de 1 pour le joueur A et de 3,5 pour le joueur B.

On considère maintenant une situation où l'information se passe en potentiellement deux étapes :

- à la fin de l'étape 0, M annonce publiquement un signal qui peut prendre la valeur α ou β. Ce signal est bruité de la façon suivante: $P(\alpha|N) = \frac{5}{7}, P(\beta|N) = \frac{2}{7}, P(\alpha|R) = \frac{2}{7}, P(\beta|R) = \frac{5}{7}$.

- si à l'étape 1, le joueur A annonce la couleur N alors que le signal annoncé est α ou si le joueur A annonce la couleur R alors que le signal annoncé est β, alors M annonce à l'issue de cette étape 1 la couleur au joueur B, sinon, il n'annonce rien au joueur B (c'est-à-dire dans les cas où A annonce R après le signal β ou annonce N après le signal α)

4) Représenter l'arbre du jeu. Montrer qu'il existe un équilibre bayésien où A annonce R après le signal β, annonce N après le signal α et l'espérance de gain est de $\frac{10}{7}$ pour le joueur A et de $\frac{25}{7}$ pour le joueur B.

5) Commenter les résultats.