Aversion à l'ambiguïté

Cours Incertitude, temps et information

du 22 novembre 2007

Plan

- Modèle
- Quelques résultats empiriques

Point de départ

- Vu cours précédent : Paradoxe d'Ellsberg, Modèle Maxmin EU de Gilboa-Schmeidler (1989)
- Interprétation des Multi-Prior?
- Manque une définition de l'aversion à l'ambiguïté

Aperçu de la littérature

- Article « Attitude toward imprecise information » (Hayashi, Gajdos, Tallon, Vergnaud) 2007
- Pour autres approches, voir références et discussion dans l’introduction

Information imprécise

- Préférences exprimées sur des actes associés à une famille de probabilités : (P,f)
- Ellsberg : urne à deux couleurs
- Parier sur Noir dans urne connue :

({(.5,.5)};f) avec f donne 1 dans l'état 1 et rien sinon

- Parier sur Noir dans l'urne inconnue :

(Δ(1,2);f)

Information imprécise

- Préférences pour l'urne connue

$$(\{(.5,.5)\};f) \succ (\Delta(1,2);f)$$

Information imprécise

- Question ouverte : d'où viennent ces familles de probabilités
  - Incertitude scientifique : experts en désaccord, hypothèses et modèles alternatifs
  - Base de données incomplète

Représentation des préférences

Theorem 2 *The preference relation $\succsim$ satisfies Axioms 1 to 5, 7 and 8 if and only if there exist a function $U : \mathcal{P} \times \mathcal{F} \to R$ which represents $\succsim$, a mixture-linear function $u : \Delta(X) \to R$ and a mapping $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ such that*

$$U(P, f) = \min_{p \in \varphi(P)} \sum_{\omega \in \Omega} u(f(\omega))\, p(\omega).$$

Moreover, u is unique up to positive linear transformations and φ is unique, has the property

(Selection): $\varphi(P) \subset P$ for every $P \in \mathcal{P}$.

Theorem 6 *The preference relation $\succsim$ satisfies Axioms 1 to 5, 7, 8, and 12 to 14 if and only if we have the representation as in Theorem 1 with the additional property that for every $S \in \mathcal{S}$, and $P \in \mathcal{P}(S)$,*

$$\varphi(P) = (1 - \varepsilon)\{s(P)\} + \varepsilon\, P$$

with $\varepsilon \in [0, 1]$ that is unique.

Deux axiomes (parmi d'autres)

Axiom 8 *(Dominance) For every* $f, g \in \mathcal{F}$ *and* $P \in \mathcal{P}$,

$$(\{p\}, f) \succsim (\{p\}, g) \;\; \textit{for every } p \in P \quad \Longrightarrow \quad (P, f) \succsim (P, g).$$

Deux axiomes (parmi d'autres)

Axiom 10 *(Aversion toward Imprecision) Let* $P, Q \in \mathcal{P}$ *be such that* P *is conditionally more precise than* Q*, then for all* $f \in \mathcal{F}$, $(P, f) \succsim (Q, f)$.

Definition 2 *Let* $P, Q \in \mathcal{P}$. *Say that* P *is* conditionally more precise *than* Q *if*

- $P \subset Q$ *and,*
- *there exists a partition* $(E_1, \ldots, E_n)$ *of* Ω *such that*

(i) $\forall p \in P, \forall q \in Q, p(E_i) = q(E_i)$ *for all* $i = 1, \ldots, n$,

(ii) $co\{p(.|E_i); p \in P\} = co\{q(.|E_i); q \in Q\}$ *for all* i *such that* $E_i \in supp(Q)$.

Comparaison d'aversion à l'imprécision

Definition 1 *Let* $\succsim_a$ *and* $\succsim_b$ *be two preference relations defined on* $\mathcal{P} \times \mathcal{F}$*. Suppose there exist two prizes,* $\bar{x}$ *and* $\underline{x}$ *in* X *such that both* a *and* b *strictly prefer* $\bar{x}$ *to* $\underline{x}$*. We say that* $\succsim_b$ *is* more averse to bet imprecision than $\succsim_a$ *if for all* $E \in \mathcal{S}$, $P \in \mathcal{P}$, *and* $\{p\} \in \mathcal{P}$,

$$(\{p\}, \bar{x}_E \underline{x}) \succsim_a [\succ_a](P, \bar{x}_E \underline{x}) \Rightarrow (\{p\}, \bar{x}_E \underline{x}) \succsim_b [\succ_b](P, \bar{x}_E \underline{x})$$

Caractérisation

Theorem 4 *Let $\succsim_a$ and $\succsim_b$ be two preference relations defined on $\mathcal{P} \times \mathcal{F}$ satisfying Axioms 1 to 7, and Axiom 9. Then, the following assertions are equivalent:*

(i) $\succsim_b$ is more averse to bet imprecision than $\succsim_a$,

(ii) for all $P \in \mathcal{P}$, $\varphi_a(P) \subset \varphi_b(P)$.

Etude sur le « mode de vie »

- Première enquête : Arrondel, Masson, Verger (Eco et Prev 2004)
- But particulier : voir si aversion au risque et aversion à l'incertain (l'ambiguïté, l'imprécision) sont deux traits psychologiques distincts avec des effets différenciés

Enquête Sofres

- Questionnaires (150 questions, 4000 réponses)
- Sous groupe de 400 qui a répondu à des questions d’économie expérimentale
- 3 élicitations d’équivalents certains pour des loteries
- 3 élicitations « d’équivalents probabilistes » pour des « loteries imprécises »

Equivalents certains

Question	<u>Option A</u> **<u>Tirage au sort</u>** **1 chance sur 2 de recevoir 20€ et 1 chance sur 2 de recevoir 0€**	<u>Option B</u> **Recevoir de manière certaine le montant indiqué**	Votre choix
1	20€ avec une chance sur 2, 0€ avec une chance sur 2	18€	
2	20€ avec une chance sur 2, 0€ avec une chance sur 2	2€	
3	20€ avec une chance sur 2, 0€ avec une chance sur 2	16€	
4	20€ avec une chance sur 2, 0€ avec une chance sur 2	5€	
5	20€ avec une chance sur 2, 0€ avec une chance sur 2	14€	
6	20€ avec une chance sur 2, 0€ avec une chance sur 2	7€	
7	20€ avec une chance sur 2, 0€ avec une chance sur 2	12€	
8	20€ avec une chance sur 2, 0€ avec une chance sur 2	8€	
9	20€ avec une chance sur 2, 0€ avec une chance sur 2	11€	
10	20€ avec une chance sur 2, 0€ avec une chance sur 2	9€	
11	20€ avec une chance sur 2, 0€ avec une chance sur 2	10€	

Equivalents certains

- c1 : équivalent certain pour 1 chance sur 2 de gagner 20 E
- c2 : équivalent certain pour 3 chances sur 10 de gagner 30 E
- c3 : équivalent certain pour 7 chances sur 10 de gagner 15 E

Equivalents probabilistes

Question	Option A		Option B		Votre choix
	Tirage au sort <u>imprécis</u>	**Gain si le tirage au sort est favorable**	**Tirage au sort <u>précis</u>**	**Gain si le tirage au sort est favorable**	
35	Entre 0 et 10 chances sur 10 de gagner	20€	5 chances sur 10 de gagner	20€	
36	Entre1 et 10 chances sur 10 de gagner	20€	5 chances sur 10 de gagner	20€	
37	Entre 2 et 10 chances sur 10 de gagner	20€	5 chances sur 10 de gagner	20€	
38	Entre 3 et 10 chances sur 10 de gagner	20€	5 chances sur 10 de gagner	20€	
39	Entre 4 et 10 chances sur 10 de gagner	20€	5 chances sur 10 de gagner	20€	
40	Entre 5 et 10 chances sur 10 de gagner	20€	5 chances sur 10 de gagner	20€	
41	Entre 6 et 10 chances sur 10 de gagner	20€	5 chances sur 10 de gagner	20€	

Equivalents probabilistes

- pmin4 : entre 0 et 10 à 6 et 10 versus 5 certain pour 20 Euros
- pmin5 : entre 0 et 8 à 5 à 8 versus 5 certain pour 20 Euros
- pmax6 : entre 2 et 10 à 2 et 5 versus 5 certain pour 20 Euros

Méthode

1. Traitement des résultats expérimentaux
2. Construction de scores
3. Utilisation des scores comme variables explicatives

Résultats expérimentaux

	c_1	c_2	c_3	pmin4	pmin5	pmax6
mean	8.56	9.02	8.08	.45	.36	.94
std	4.77	5.36	3.55	.115	.176	.14
median	9.5	9	8.5	.5	.45	1
min	2	2	2	0	0	5
max	20	30	15	5	5	10
obs	364	379	357	350	296	309

Corrélation aversion au risque et à l'incertain

	c_1	c_2	c_3	pmin4	pmin5
c_2	$.81^\star$	1			
c_3	$.72^\star$	$.70^\star$	1		
pmin4	$-.13$	$-.06$	$-.17^\star$	1	
pmin5	$-0.19^\star$	$-.13$	$-.22^\star$	$.40^\star$	1
pmax6	$-0.16^\star$	$-0.16^\star$	$-.14$	$.37^\star$	$.59^\star$

* Significatif à 1%

Modèle estimé

- Fonctionnelle estimée

$$\left(\gamma f\left(\frac{n_{min}}{10}\right)+\delta f\left(\frac{n_{max}}{10}\right)+(1-\gamma-\delta)f\left(\frac{n_{min}+n_{max}}{10}\right)\right)u(20)$$
$$+\left(1-\left(\gamma f\left(\frac{n_{min}}{10}\right)+\delta f\left(\frac{n_{max}}{10}\right)+(1-\gamma-\delta)f\left(\frac{n_{min}+n_{max}}{10}\right)\right)\right)u(0)$$

avec spécification :

$$u(x)=x^{\alpha}$$

$$f(p)=e^{-(-\log p)^{\beta}}$$

Estimations et corrélations

	α	β	γ	δ
mean	1.01	.50	.57	.098
std	.54	.45	.21	.19
median	.94	.38	.56	0
min	.38	.008	0	0
max	3.57	3.49	1	1
obs	346	346	346	346

	α	β	γ
β	.03	1	
γ	$-.062$	$-.04$	1
δ	$-.06$	$.72^{\star}$	$-.16^{\star}$

* Significatif à 1%

Scores

- 4 scores
- 2+2 basés sur l’aversion au risque et l’incertain EC5 et P5
- 4 basés sur les estimations des paramètres du modèle

Scores based on raw results

Selection among ~150 questions decomposed in ~1150 items

- Score C : a correlation (5%) with at least one of the certainty equivalent
- Score Cd : a correlation (5%) with at least two of the certainty equivalent

- Score P : a correlation (5%) with at least one of the probability equivalent
- Score Pd : a correlation (5%) with at least two of the probability equivalent

Caractéristiques

	C	P	Cd	Pd	Risk Score (Arrondel-Masson) 2004
Items	150	164	60	37	~100
Alpha of Cronbach	0.79	0.78	0.65	0.58	0.67
Common items	33		3		
Corr.	.70*		.38*		

Scores based on estimation

- Score Alpha : a correlation (5%) with the Alpha estimate
- Score Beta …..
- Score Gamma…..
- Score Delta……

Décomposition des scores risques et incertains dans les scores des estimations

- Regression of risk and ambiguity score on estimation based score *(all score normalized and centered)*

	C	P	Cd	Pd
Alpha	.71	.37	.67	.15
Beta	.13	.21	.11	.25
Gamma	.07	.36	ns (0)	.26
Delta	.12	.17	.11	.11
R2	0.69	0.64	0.58	0.28

Questions à succès

E2 Pratiquez-vous ou avez-vous pratiqué chacun des sports suivants ?

	Oui	Non
• Ski hors piste	☐	☐
• Ski sur piste	☐	☐
• Parapente, ULM, parachute, saut à l'élastique	☐	☐
• Alpinisme, escalade, rafting ou canyonning, plongée	☐	☐
• Un autre sport individuel (tennis, squash, athlétisme, natation…)	☐	☐
• Un sport collectif...	☐	☐
• Sport de combat (Arts martiaux, boxe…).........	☐	☐

Ski de piste, sport individuel et collectif très fortement corrélé aux scores.

Questions à succès

F39 Voici des personnalités ou personnages présentés par « couple ». Pour chacun indiquez à qui vous vous identifiez plus facilement. *1 seule réponse par ligne*

				Ne connais pas / sans opinion
• Les Beatles .... ☐	ou	• Les Rolling-Stones . ☐		☐
• Tintin .... ☐	ou	• Capitaine Haddock . ☐		☐
• Britney Spears ..... ☐	ou	• Lorie........................ ☐		☐
• Astérix .... ☐	ou	• Obélix .... ☐		☐
• Jack Bauer *(«24h»)* ☐	ou	• Louis la brocante .... ☐		☐
• La cigale............... ☐	ou	• La fourmi .... ☐		☐
• James Bond .... ☐	ou	• Maigret .... ☐		☐
• Laura Ingalls *(« La petite maison dans la prairie »)* .... ☐	ou	• Carrie Bradshaw *("Sex & the city")* .... ☐		☐
• Jamel Debbouze .. ☐	ou	• Christian Clavier ..... ☐		☐
• Thierry Ardisson ... ☐	ou	• Michel Drücker .... ☐		☐

Aime le risque :
Beatles, Tintin, Lorie, Asterix, Jack, Bond

N'aime pas le risque :
Louis, Maigret

Aime l'incertain :
Beatles, Britney, Jamel

N'aime pas l'incertain :
Louis

Questions à succès

F32 Vous arrive-t-il de... *1 seule réponse par ligne*

	Très souvent	Assez souvent	Rarement	Jamais	Sans objet
• vous garer en dehors des zones autorisées	☐	☐	☐	☐	☐
• vous garer sans avoir mis d'argent dans l'horodateur................	☐	☐	☐	☐	☐
• dépasser la vitesse autorisée....................	☐	☐	☐	☐	☐
• ne pas mettre votre ceinture de sécurité	☐	☐	☐	☐	☐
• passer au feu orange .	☐	☐	☐	☐	☐
• prendre les transports en commun sans ticket-	☐	☐	☐	☐	☐

Aime le risque :
feu (As souvent), Transport (rar)

N'aime pas le risque :
Horod (jamais), vit (jamais)

Aime l'incertain :
Garer (A Sou), Horod (tsouvent)

N'aime pas l'incertain :
Horod (jamais), vit(rar),

Scores et type de portefeuille financier détenu

- Individual characteristics used :
  - household earnings,
  - age
  - social status
  - diploma
  - household characteristics
  - nb of child out of the family
  - size of the town
  - received a legacy
  - unemployed in the past
  - presently unemploy
  - budget constraint

L'usage d'internet

- Logistic regression for « *Using internet for financial investment* » (20% of the population)

	Coefficient	**z**	**P>|z|**
C	-.25	-3.58	0.000
P	-.21	-3.27	0.001
Cd	*-.19*	*-3.28*	*0.001*
Pd	*-.13*	*-2.65*	*0.008*

Possession d’actifs financiers

- Logistic regression for « *Do not have any financial asset* » (13% of the population)

	Coefficient	**z**	**P>|z|**
C	.02	0.25	0.805
P	.016	2.09	0.036
Cd	*.03*	*0.49*	*0.622*
Pd	*.19*	*3.20*	*0.001*

Possession d'un PEA

- Logistic regression for « *PEA*» (22% of the population)

	Coefficient	z	P>|z|
C	-.01	-0.15	0.884
P	-.26	-3.94	0.000
Cd	*-.06*	*-1.24*	*0.213*
Pd	*-.11*	*-2.23*	*0.026*

Possession d'un Compte ou Plan Epargne Logement

- Logistic regression for « A un *CEL ou un PEL*» (49% of the population)

	Coefficient	z	P>|z|
C	.02	0.4	0.692
P	-.18	-3.39	0.001
Cd	*.09*	*1.91*	*0.056*
Pd	*-.19*	*-4.77*	*0.000*

Home Bias

- Logistic regression for « *Do have stocks of French companies*» (18% of the population)

	Coefficient	z	P>|z|
C	-.22	-2.95	0.003
P	-.14	-2.00	0.046
Cd	*-.23*	*-3.87*	*0.000*
Pd	*-.06*	*-1.05*	*0.293*

Home Bias

- Logistic regression for « *Do have stocks of Foreign companies*» (4.5% of the population)

	Coefficient	z	P>|z|
C	-.15	-1.10	0.273
P	-.38	-2.00	0.002
Cd	*-.18*	*-1.57*	*0.116*
Pd	*-.08*	*-0.82*	*0.413*

Home Bias

- 96% of owners of foreign stocks do also possess french stocks
- Logistic regression for « *Do have stocks of Foreign societies*» when they have french stocks (25% of the sub population)

	Coefficient	z	P>|z|
C	-.11	-0.71	0.475
P	-.27	-1.95	0.051
Cd	*-.08*	*-0.63*	*0.528*
Pd	*-.04*	*-0.33*	*0.741*

Recueil d’exercices sur la décision dans l’incertain

Exercice . On considère un choix de portefeuille. Le décideur peut investir dans un actif qui rapporte un montant $\bar{x}$ si l'état de la nature α se réalise et $\underline{x}$ si l'état de la nature β se réalise. Le prix de cet actif est noté p. On pose $\bar{x} > \underline{x}$. On suppose que la fonction d'utilité, définie sur les montants monétaires, est linéaire: $u(x) = x$.

1) On considère ici qu'il existe des données permettant d'estimer des fréquences précises d'occurence des deux états. On peut donc poser que la probabilité de l'état α est π (celle de β étant égal à $1 - \pi$). Dans ce cas, le décideur se comporte en maximisateur de l'espérance d'utilité. Quelle est l'utilité du décideur s'il achète une unité de l'actif au prix p? Quelle est son utilité s'il vend une unité de l'actif au prix p? En conclure qu'il existe un prix unique tel que le décideur ne veut détenir aucune position (courte ou longue) en actif [en d'autres termes la demande d'actif est égale à zéro à ce prix].

2) On suppose maintenant que le décideur est de type "Maxmin expérance d'utilité". Il a un ensemble de croyances tel qu'il considère possibles toutes les

valeurs de π comprises entre $\underline{\pi}$ et $\bar{\pi}$. Quelle est l'utilité du décideur s'il achète une unité de l'actif au prix p? Quelle est son utilité s'il vend une unité de l'actif au prix p? En conclure qu'il existe un intervalle de prix tel que, pour tout prix dans cet intervalle, le décideur ne veut détenir aucune position (courte ou longue) en actif

3) On considère maintenant un décideur dont les préférences sont représentées par une combinaison linéaire du minimum d'espérance d'utilité par rapport à un ensemble de probabilités et de l'espérance d'utilité par rapport à une probabilité de référence dans cet ensemble. Le coefficient de cette combinaison est le degré d'aversion à l'imprécision du décideur (plus il est adversaire de l'imprécision, plus le coefficient qu'il met sur le minimum d'espérance d'utililté est élevé).

On considère le même ensemble que dans la seconde question, à savoir l'intervalle $[\underline{\pi}, \bar{\pi}]$. La probabilité de référence est celle qui met un poids $(\underline{\pi}+\bar{\pi})/2$ sur l'état α (et donc $1-(\underline{\pi}+\bar{\pi})/2$ sur l'état β. Quelle est l'utilité du décideur s'il achète une unité de l'actif au prix p? Quelle est son utilité s'il vend une unité de l'actif au prix p? En conclure qu'il existe un intervalle de prix tel que, pour tout prix dans cet intervalle, le décideur ne veut détenir aucune position (courte ou longue) en actif. Comment évolue les bornes de cet intervalle en fonction du coefficient d'aversion pour l'imprécision?

Exercice Vous faites face à un risque individuel dont la probabilité d'occurence est mal connue. Les experts s'accordent pour dire que celle-ci est comprise entre $1/10$ et $3/10$ avec un scénario de référence à $1/5$.

On suppose que la loi des grands nombres est valable, à savoir que la mutuelle à laquelle vous appartenez rassemble un grand nombre de personnes de caractéristiques identiques: si la probabilité de sinistre est en fait p, alors la proportion de personnes touchées par le sinistre est égale à p.

Vous avez une dotation de 10 en $t = 0$. En $t = 1$, en cas de sinistre vous avez 5 alors qu'en l'absence de sinistre vous avez 10.

Votre mutuelle vous propose un contrat du type suivant:

- payer un prix x en $t = 0$ pour une assurance totale et actuariellement équitable (i.e., recevoir 5 en plus dans l'état du monde où vous subissez le dommage).
- si la mutuelle ne peut honorer ses promesses en $t = 1$, alors elle procède à un rappel de cotisations, et tous les mutualistes doivent verser un montant y, qui correspond à la différence entre la proportion de personnes effectivement touchées par le risque ($p^\star$) et la probabilité p sur laquelle était basée le calcul de la prime "actuarielle" initiale. On a donc $x = 5p$ et $y = 5p^\star - x$. Si $p^\star > p$ il s'agit d'un rappel de cotisation, si $p^\star < p$, la mutuelle rembourse ses assurés.

1) Ecrire l'espérance d'utilité lorsque le prix du contrat est $x = 5p$ et la vraie probabilité est connue, égale à $p^\star$.

Vous êtes adversaire de l'incertitude et votre critère de décision est donné par:

$$\max u(c_0) + \alpha \min_{p \in [\underline{p}, \overline{p}]} E_p u(c_1) + (1-\alpha) E_{\widetilde{p}} u(c_1)$$

où c_0 est la consommation en $t = 0$, c_1 la consommation (aléatoire) à la date $t = 1$, u est votre fonction d'utilité concave, $[\underline{p}, \overline{p}]$ est l'intervalle de probabilité auquel la "vraie probabilité" appartient, $\widetilde{p} = 1/5$ est la probabilité de référence et α est un indice de pessimisme, compris entre 0 et 1.

2) Définir une utilité indirecte (en fonction de x) d'un contrat du type de celui décrit (sachant que maintenant $p^\star$ est inconnue et appartient à $[1/10, 3/10]$).

3) Ecrire les conditions de premier ordre de la maximisation de l'utilité indirecte par rapport au prix x. Résoudre dans le cas $\alpha = 0$, puis dans le cas $\alpha = 1$. Commenter.