

Chapitre 2  
**MODELES DE TOURNOI STOCHASTIQUES**

David ENCAOUA  
Décembre 2004

## Introduction

Au chapitre précédent la technologie de R&D ne comportait aucune incertitude. Un investissement en R&D réalisé à la date 0 ou encore un certain flux d'investissements étalés dans le temps étaient supposés conduire à la réalisation d'une invention et de sa transformation en une innovation à une date certaine dépendant de l'effort de R&D consenti. C'est évidemment une représentation très stylisée qu'il nous faut enrichir par la prise en compte de deux facteurs, *le type d'incertitude technologique*, d'une part et *le traitement de l'investissement en R&D*, d'autre part.

Commençons par introduire deux formes d'incertitude technologique.

### *1. Incertitude sur la date d'obtention de l'invention.*

La durée nécessaire à la réalisation d'une invention de caractéristiques données est en général une variable aléatoire. Pour représenter la distribution de cette variable aléatoire, on retient dans ce chapitre une hypothèse simplificatrice importante: la probabilité conditionnelle de découverte à un instant donné, sachant que la découverte n'a pas eu lieu avant cet instant, est invariante au cours du temps. Un processus aléatoire vérifiant cette propriété est dit *sans mémoire*. Dans un tel processus, quelle que soit la durée passée à un projet de recherche et tant que celui-ci n'a pas abouti, la *probabilité instantanée de découverte* reste la même au cours du temps. L'hypothèse d'un processus d'innovation sans mémoire correspond à une simplification technique que l'on retient aussi bien dans les modèles microéconomiques de course à l'innovation que dans les modèles macroéconomiques de croissance. La probabilité instantanée de découverte désigne le *taux de hasard* ou encore le *taux de succès*. Ainsi, dans un modèle stochastique, la date de découverte est aléatoire mais le taux de hasard dépend de façon certaine de l'effort de R&D que l'entreprise consent. Plus cet effort (dépense de R&D) est élevé, plus le taux de hasard est élevé. Mais la technologie de R&D ne satisfait pas nécessairement l'hypothèse de rendements d'échelle constants. Comme dans tout processus de production, les rendements d'échelle peuvent d'abord être croissants puis décroissants. Nous développons cet aspect dans la suite.

### *2. Incertitude sur le succès de l'innovation.*

Dans une seconde approche, on omet la dimension temporelle et on se concentre sur l'incertitude inhérente à l'invention elle-même, c'est à dire sur la probabilité de succès. Tout projet de recherche est caractérisé par une certaine probabilité de succès et celle-ci dépend de l'effort de recherche consenti. On postule donc à nouveau une certaine relation entre la probabilité de succès et la dépense de R&D. On suppose en général que la probabilité de succès croît avec la dépense, mais à un rythme de plus en plus faible. Ce cadre analytique très simple

permet de traiter certaines questions pour lesquelles la dimension temporelle n'est pas au centre de l'analyse. On en donne ici une illustration en comparant le niveau de R&D induit par le marché et le niveau de recherche socialement optimal.

Désignons par  $T(x)$  la probabilité de succès en fonction de la dépense de R&D  $x$ . On suppose que  $T(x)$  croît avec  $x$ , mais à un rythme de plus en plus faible. Plus précisément, on suppose que  $T(0) = 0, T'(x) > 0$  et  $T''(x) < 0 \forall x > 0$ . Supposons également que le profit attendu de l'innovation soit connu de l'entreprise et désignons le par  $\pi^*$ . En cas d'échec, le profit est nul. Dans ces conditions, une entreprise neutre au risque choisit un niveau de dépense de R&D qui maximise son espérance de profit donnée par l'expression  $E[\pi^*, x] = T(x)\pi^* - x$ . Le niveau de dépense  $x^*$  qui maximise le profit satisfait donc la condition:

$$T'(x^*) = \frac{1}{\pi^*}$$

Plus le niveau  $\pi^*$  de profit attendu de l'innovation est élevé, plus le niveau de dépense  $x^*$  est grand (on a supposé  $T''(x) < 0$ ). Ce résultat est donc tout à fait intuitif.

Comparons ce niveau de dépense  $x^*$  avec le niveau  $x^{**}$  correspondant à la maximisation du bien-être social. Pour définir le bien-être social, considérons une innovation de produit et supposons que la demande du nouveau produit soit donnée par la fonction de demande inverse  $p = P(q)$  où  $p$  est le prix de vente unitaire du bien et  $q$  la quantité demandée. Supposons que l'agent qui a réalisé l'innovation obtienne un brevet sur son invention. Supposons que ce titre lui donne la possibilité de vendre son produit à un prix de monopole. Si on désigne par  $C(q)$  la fonction de coût de production du nouveau bien, l'innovateur va donc choisir la valeur  $q^*$  qui maximise le profit de sorte que le profit de l'innovation  $\pi^*$  est donné par  $\pi^* = q^*P(q^*) - C(q^*)$ . Le nouveau produit est à l'origine d'un surplus positif des consommateurs donné par  $S^* = \int_0^{q^*} P(q) dq - q^*P(q^*)$ . Le surplus global, somme du surplus des consommateurs et du profit de l'innovateur, est égal à  $W^* = S^* + \pi^* = \int_0^{q^*} P(q) dq - C(q^*)$ . La valeur de la dépense de R&D  $x^{**}$  socialement optimale est celle qui maximise l'espérance du surplus global égale à  $E[W^*, x] = T(x)[S^* + \pi^*] - x$ . La valeur de  $x^{**}$  satisfait donc la condition du premier ordre

$$T'(x^{**}) = \frac{1}{S^* + \pi^*}$$

Cette condition est à comparer à la condition du premier ordre de maximisation du profit, à savoir  $T'(x^*) = \frac{1}{\pi^*}$ . Comme le surplus des consommateurs  $S^*$  généré par l'innovation de produit est strictement positif, on en déduit  $T'(x^{**}) < T'(x^*)$ . Comme on a supposé  $T''(x) < 0$ , on obtient :

$$x^{**} > x^*$$

Ce modèle très simple conduit donc au résultat suivant :

*Le niveau de R&D qu'effectue une entreprise dont l'innovation est protégée par un brevet est inférieur au niveau de R&D socialement optimal.*

La raison est évidente. En l'absence de discrimination par les prix, l'innovateur

ne peut accaparer le surplus des consommateurs induit l'innovation. De ce fait, son effort de R&D est plus faible que ce qu'exigerait l'optimum social. Ce modèle reste cependant très frustré à au moins deux niveaux. D'une part, il ne prend pas en compte la concurrence en R&D pour être le premier à innover. En particulier, les flux de dépenses encourues tant que l'innovation n'est pas réalisée sont ignorés. D'autre part, il ne prend pas en compte la durée finie de la période de protection par le brevet, période au delà de laquelle l'innovation tombe dans le domaine public. Ces deux limitations nous conduisent à privilégier dans la suite la dimension temporelle de l'incertitude technologique. Enfin, cette dimension joue un rôle important dans les modèles de *croissance endogène* pour représenter le délai aléatoire séparant deux innovations successives.

Passons à présent au traitement de l'investissement en R&D. Deux formes sont possibles.

### 3. *Effet d'échelle.*

La dépense en R&D correspond à un investissement fixe et irréversible réalisé lors du démarrage du projet de recherche. Cela correspond par exemple à la mise en place d'un laboratoire de recherche. On dit dans ce cas que la dépense de recherche traduit un *effet d'échelle* : c'est le montant de l'investissement initial qui détermine le taux de hasard.

### 4. *Effet d'intensité.*

La dépense en R&D peut également prendre la forme d'un flux continu encouru tant qu'une découverte n'est pas réalisée par l'un des concurrents. Le flux de dépenses s'interrompt aussitôt après la découverte. On dit dans ce cas que les dépenses de recherche traduisent un *effet d'intensité* : c'est l'intensité des dépenses courantes affectées à la recherche qui détermine alors le taux de hasard. Comme nous le verrons cette distinction n'est pas neutre. Selon qu'on privilégie l'effet d'échelle ou l'effet d'intensité, une course à l'innovation peut conduire à des résultats sensiblement différents.

Le plan du chapitre est le suivant. Dans la section 1, nous caractérisons les processus aléatoires ayant un taux de hasard invariant au cours du temps : nous montrons qu'ils sont représentés par une distribution exponentielle. Nous discutons les propriétés de ces processus en examinant les notions de rendement marginal et de rendement d'échelle ainsi que les notions équivalentes de coût marginal et de coût moyen de l'effort de recherche. Dans la section 2, nous analysons les propriétés d'une course à l'innovation avec *effet d'échelle*. Cette analyse est menée aussi bien dans une perspective de court terme dans laquelle le nombre de participants à la course est supposé fixé que dans une perspective de long terme avec libre entrée dans la course à l'innovation. Dans la section 3, nous examinons les propriétés d'une course à l'innovation avec *effet d'intensité*. Dans la section 4, on compare les incitations à l'innovation d'une firme installée et d'un entrant. On montre que les résultats diffèrent selon que la technologie de recherche est représentée sous une forme déterministe ou stochastique.

## Taux de hasard invariant dans le temps.

En dépensant un montant  $x$  en R&D, une entreprise peut obtenir une innovation à une date aléatoire  $\tau(x)$ . La date de succès  $\tau(x)$  est une variable aléatoire dont la distribution est représentée par la fonction de répartition  $F(t,x) = \Pr[\tau(x) \leq t]$ . Supposons que cette fonction de répartition soit continue et dérivable en  $t$  dans l'intervalle  $t \in [0, \infty[$ . On note  $f(t,x)$  la fonction de densité associée à cette fonction de répartition. Elle est définie par  $f(t,x) = \frac{\partial F(t,x)}{\partial t}$ .

Définissons la notion de taux de hasard d'un processus sans mémoire .

**Definition** *Le taux de hasard  $T(x)$  lié à la date aléatoire de découverte  $\tau(x)$  est la probabilité conditionnelle de découverte dans un intervalle infinitésimal  $[t, t + dt]$ , sachant que la découverte n'a pas eu lieu avant  $t$ . Formellement, le taux de hasard  $T(x)$  est défini par*

$$T(x) = \Pr[\tau(x) \in [t, t + dt] / \tau(x) > t] = \frac{F(t + dt, x) - F(t, x)}{1 - F(t, x)} \sim \frac{f(t, x) dt}{1 - F(t, x)}$$

Le ratio  $\frac{f(t,x)}{1-F(t,x)}$  définit ainsi le taux de hasard instantané ou taux de succès  $T(x)$ . On a volontairement omis d'inclure dans  $T(x)$  la variable de temps  $t$  pour exprimer le fait qu'on se limite à des processus dont le taux de hasard ne varie pas au cours du temps, c'est à dire des processus *sans mémoire*.

Comme  $f(t,x) = -\frac{\partial[1-F(t,x)]}{\partial t}$ , on en déduit l'expression du taux de hasard  $T(x)$ :

$$T(x) = -\frac{\frac{\partial[1-F(t,x)]}{\partial t}}{1 - F(t,x)}$$

Par intégration on obtient immédiatement :

$$\text{Log}[1 - F(t,x)] = -T(x)t + k$$

où  $k$  est la constante d'intégration. Il en résulte:

$$F(t,x) = 1 - \exp[-T(x)t + k]$$

Comme la fonction de répartition  $F(t,x)$  est telle que  $F(0,x) = 0 \forall x$ , on en déduit  $k = 0$ .

Au total la fonction de répartition d'une variable aléatoire  $\tau(x)$  dont le taux de hasard est invariant au cours du temps est donnée par:

$$F(t,x) = 1 - \exp[-T(x)t]$$

On reconnaît là l'expression d'une distribution exponentielle en temps continu connue sous le nom de loi de Poisson, dont le paramètre  $T(x)$  représente le taux de hasard.

La fonction de densité définie par  $f(t,x) \equiv \frac{\partial F(t,x)}{\partial t}$  est égale à:

$$f(t,x) = T(x) \exp[-T(x)t]$$

La technologie de R&D est ainsi résumée par la fonction de taux de hasard  $T(x)$  exprimant la probabilité conditionnelle de découverte en fonction de la dépense  $x$ . Le taux de hasard, indépendant du temps, est le paramètre d'une loi de Poisson dont on rappelle ici la définition générale:

**Definition** Une variable aléatoire  $\tau$  de support  $[0, \infty[$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  si sa fonction de répartition  $F(t)$  définie par  $F(t) \equiv \Pr[\tau \leq t]$  est égale à  $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$ .

Si on désigne par  $f(t)$  la fonction de densité, on a  $f(t) \equiv \frac{dF(t)}{dt} = \lambda \exp(-\lambda t)$ . On remarque que  $\ln f(t) = \ln \lambda - \lambda t$ , de sorte que la fonction de densité  $t \rightarrow f(t)$  est log-linéaire. En tant que telle, c'est une fonction log-concave.

Les distributions dont les fonctions de densité sont log-concaves ont des propriétés intéressantes. On peut notamment montrer que si la fonction de densité  $f(t)$  est log-concave, la fonction de répartition  $F(t)$  et l'espérance conditionnelle de la date de succès futur après une période sans succès sont elles-mêmes log-concave.

Dans la formulation adoptée plus haut, le taux de hasard  $T(x)$  dépend de l'effort de recherche  $x$ . Insistons bien sur le fait que dans cette représentation, la probabilité instantanée de découverte dépend de la dépense en R&D  $x$  mais non du temps  $t$ . L'éventuel apprentissage qui a lieu durant la période précédant l'invention ne joue donc aucun rôle. Le processus de Poisson retenu pour modéliser l'incertitude sur la date d'apparition de l'invention est ici un *processus sans mémoire*, comme on l'a rappelé plus haut. Des processus avec mémoire seront présentés ultérieurement.

Avant de spécifier les hypothèses retenues sur la fonction  $T(x)$ , on peut calculer l'espérance de la date de découverte.

## Espérance de la date de découverte.

1. Considérons d'abord le cas où il n'y a qu'une seule firme active en R&D.

Par définition, l'espérance de la date de découverte, notée  $E[\tau(x)]$  est donnée par:

$$E[\tau(x)] = \int_0^{\infty} t dF(t, x) = \int_0^{\infty} t f(t, x) dt = \int_0^{\infty} t T(x) e^{-T(x)t} dt = T(x) \int_0^{\infty} t e^{-T(x)t} dt.$$

Une intégration par parties conduit immédiatement à:

$$E[\tau(x)] = \frac{1}{T(x)}$$

L'espérance de la date de découverte est l'inverse de la probabilité instantanée de découverte. L'interprétation est donc particulièrement simple. La durée du processus de R&D conduisant à l'invention est en moyenne d'autant plus faible que la valeur de  $T(x)$  est élevée. En investissant  $x$ , une firme acquiert une probabilité instantanée de découverte donnée par  $T(x)$ . En espérance, la durée de

la recherche est donc d'autant plus faible que la probabilité instantanée de découverte  $T(x)$  est élevée.

2. Considérons à présent la situation où il existe  $n$  firmes actives en R&D.

Supposons que les  $n$  firmes mènent leurs programmes de recherche de manière indépendante et que le taux de hasard soit le même pour chaque firme. Si la firme  $i$  investit ( $x_i$ ) ( $i = 1 \dots n$ ), la date d'obtention de l'innovation est une variable aléatoire notée  $\tau(x_1, \dots, x_n)$ . La course à l'innovation étant caractérisée comme un tournoi dont le vainqueur est l'agent qui réalise l'invention en premier, il en résulte que cette variable aléatoire est définie par :

$$\tau(x_1, \dots, x_n) = \min[\tau(x_1), \dots, \tau(x_n)]$$

La fonction de répartition  $F(t, x_1, \dots, x_n)$  de cette variable aléatoire se détermine aisément. Par définition, on a :

$$F(t, x_1, \dots, x_n) = \Pr[\tau(x_1, \dots, x_n) \leq t] = 1 - \Pr[\tau(x_1, \dots, x_n) > t].$$

Comme les  $n$  variables aléatoires  $\{\tau(x_i)\}$  sont indépendantes et identiquement distribuées, on a :

$$\Pr[\tau(x_1, \dots, x_n) > t] = \Pr[\min(\tau(x_1), \dots, \tau(x_n)) > t] = \prod_{i=1}^{i=n} \Pr[\tau(x_i) > t] = \exp\left[-\sum_{i=1}^{i=n} T(x_i)t\right]$$

Donc

$$F(t, x_1, \dots, x_n) = \Pr[\tau(x_1, \dots, x_n) \leq t] = 1 - \exp\left[-\sum_{i=1}^{i=n} T(x_i)t\right]$$

L'espérance de la date de succès est alors donnée par :

$$E[\tau(x_1, \dots, x_n)] = \int_0^{\infty} t \frac{\partial F(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial t} dt = \int_0^{\infty} t \exp\left[-\sum_{i=1}^{i=n} T(x_i)t\right] dt$$

On obtient immédiatement après intégration par parties :

$$E[\tau(x_1, \dots, x_n)] = \frac{1}{\sum_{i=1}^{i=n} T(x_i)}$$

En présence de  $n$  agents poursuivant de manière indépendante le même programme de recherche, la probabilité de découverte par au moins un agent, encore appelée *taux de hasard global*, est la somme des taux de hasard individuels et l'espérance de la date de découverte est l'inverse du taux de hasard global.

## Liens entre taux de hasard et dépense : rendements de la R&D

Nous adoptons dans ce qui suit les trois hypothèses suivantes relatives à la fonction liant la probabilité instantanée de découverte (taux de hasard)  $T(x)$  à la dépense  $x$  :

i/  $T(x)$  est une fonction continue de classe  $C^2$ , croissante en  $x$ , telle que  $T'(x) > 0 \forall x \geq 0$ , avec  $T(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} T'(x)$

ii/  $\exists$  une valeur  $\bar{x} \geq 0$  telle que  $T''(x) \begin{cases} \geq 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \bar{x} \\ \leq 0 & \text{si } x \geq \bar{x} \end{cases}$

iii/  $\exists$  une valeur  $\tilde{x}$  telle que  $0 \leq \bar{x} \leq \tilde{x} < \infty$  et  $\frac{T(x)}{x} \begin{cases} \leq T'(x) & \text{si } x \leq \tilde{x} \\ \geq T'(x) & \text{si } x \geq \tilde{x} \end{cases}$

Ces hypothèses ont la même interprétation que celles habituellement retenues dans le cadre d'une technologie de production. En dépensant  $x$ , une entreprise acquiert une probabilité instantanée de découverte  $T(x)$  qui croît avec  $x$  (hypothèse i/). Le *rendement moyen* d'une dépense  $x$  est mesuré par le rapport  $\frac{T(x)}{x}$  et son *rendement marginal* par  $T'(x)$ . L'hypothèse ii/ exprime que le rendement marginal est d'abord croissant en  $x$  pour des valeurs de  $x$  n'excédant pas le seuil  $\bar{x}$ . Au delà de ce seuil, le rendement marginal de la dépense  $T'(x)$  décroît avec  $x$  et devient inférieur au rendement moyen  $\frac{T(x)}{x}$  à partir du seuil  $\tilde{x}$  (hypothèse iii/). La technologie de R&D obéit ainsi d'abord à des rendements d'échelle croissants (avant  $\tilde{x}$ ), puis à des rendements d'échelle décroissants (après  $\tilde{x}$ ). Les graphes des courbes  $T'(x)$  et  $\frac{T(x)}{x}$  ont ainsi des formes en  $U$  inversé avec pour asymptote l'axe des  $x$  lorsque  $x \rightarrow \infty$ . Le graphe du rendement marginal  $T'(x)$  coupe le graphe du rendement moyen  $\frac{T(x)}{x}$  par le haut en la valeur  $\tilde{x}$  où le rendement moyen atteint son maximum. Avant  $\tilde{x}$ , le rendement marginal est au dessus du rendement moyen et il est en dessous après  $\tilde{x}$ .

## Coût de l'effort.

On peut interpréter d'une autre manière les hypothèses précédentes en utilisant la fonction inverse de  $T(\cdot)$ . Remarquons d'abord que la fonction  $x \rightarrow T(x) = h$  étant strictement croissante (hypothèse i/), son inverse  $T^{-1}$  est bien définie par  $T^{-1}(h) = x$ .

En notant  $C$  la fonction inverse  $T^{-1}$ , la valeur  $C(h)$  désigne le coût, en termes de dépenses de R&D, nécessaire à l'obtention d'une probabilité de découverte instantanée  $h$ . On désigne parfois la probabilité instantanée de découverte comme *l'effort*  $h$  en R&D, auquel on associe le *coût de l'effort*  $C(h) = x$ .

Le coût moyen de l'effort  $h$  défini par le rapport  $\frac{C(h)}{h}$  est l'inverse du rendement moyen de la dépense :  $\frac{C(h)}{h} = \frac{1}{\frac{T(x)}{x}}$ .

De même, le coût marginal de l'effort  $h$  défini par  $C'(h)$  est l'inverse du rendement marginal de la dépense :  $C'(h) = \frac{1}{T'(x)}$ .

Notons enfin que  $C''(h) = \frac{-T''(x)}{T'(x)^3}$ .

On peut ainsi interpréter les hypothèses i/, ii/ et iii/ aussi bien à partir de la fonction  $T$  qui relie la dépense  $x$  à l'effort  $h = T(x)$ , qu'à partir de la fonction inverse  $C = T^{-1}$  qui relie l'effort  $h$  au coût d'obtention de cet effort  $x = C(h)$ .

En termes de fonction de coût, l'hypothèse ii/ revient à dire que le graphe du

coût marginal  $C'(h)$  de l'effort  $h$  a une forme en  $U$ . Le coût marginal de l'effort décroît d'abord avec  $h$  pour atteindre un minimum en  $\bar{h}$  tel que  $C(\bar{h}) = \bar{x}$ , puis il croît avec  $h$ . La zone où le coût marginal  $C'(h)$  décroît avec  $h$  (i.e. celle où la probabilité marginale de découverte  $T'(x)$  croît avec la dépense  $x$ ) est celle des *rendements marginaux croissants* et la zone où le coût marginal croît avec  $h$  (i.e. celle où la probabilité marginale de découverte  $T'(x)$  décroît avec la dépense  $x$ ) est celle des *rendements marginaux décroissants*.

De même, l'hypothèse iii/ exprime que le coût moyen de l'effort  $\frac{C(h)}{h}$  a également une forme en  $U$  qui atteint son minimum en  $\tilde{h}$  où  $\tilde{h}$  est défini par  $C(\tilde{h}) = \tilde{x}$ . Le coût moyen  $\frac{C(h)}{h}$  est supérieur au coût marginal  $C'(h)$  pour  $h < \tilde{h}$  et il lui est inférieur pour  $h > \tilde{h}$ .

Remarquons enfin que les seuils  $\tilde{x}$  et  $\bar{x}$  peuvent être supposés nuls, comme cela est fait dans certaines applications. Dans ce cas, la technologie de R&D présente des rendements d'échelle globaux qui sont toujours décroissants ( $T''(x) \leq 0 \forall x \geq 0 \Leftrightarrow C''(h) = -\frac{T''(x)}{T'(x)^3} \geq 0 \forall h \geq 0$ ).

Une spécification de la fonction  $T(x)$  possédant les propriétés précédentes conduit à un graphe de  $T(x)$  ayant la forme suivante (figure 2.3)

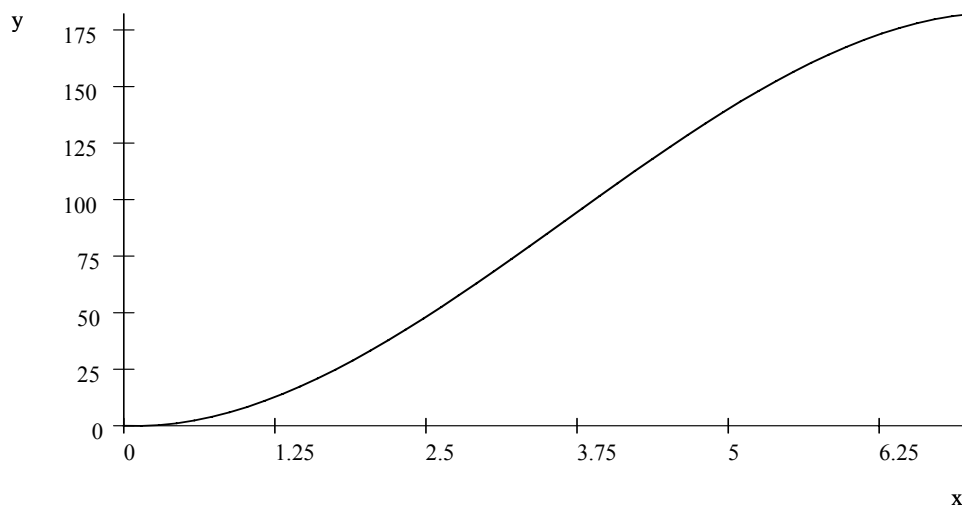


Figure 2.3: Graphe d'une fonction  $h = T(x)$  vérifiant les hypothèses

Notons enfin que des formulations différentes pour la distribution de la probabilité instantanée de découverte  $T(x)$  ont été proposées dans la littérature économique. Mais ces formulations se prêtent difficilement à des calculs analytiques simples, notamment lorsqu'il s'agit d'étudier l'issue d'une "course au brevet" entre un nombre fini de firmes. Nous garderons donc à ce stade d'analyse une formulation de la variable aléatoire représentant la date de découverte par une loi de Poisson dont le paramètre dépend de la dépense, comme cela a été fait dans les travaux pionniers de Loury (1979), Lee et Wilde (1980), Dasgupta et Stiglitz (1980). Cette formulation continue d'être adoptée dans beaucoup de



travaux, notamment dans les modèles de croissance endogène.

## Course à l'innovation avec effet d'échelle.

Revenons à la distinction, mentionnée dans l'introduction de ce chapitre, selon laquelle le coût de la R&D peut prendre deux formes. Soit, il a la dimension d'un coût fixe payé une seule fois au début de la course; soit, il a la dimension d'un flux de dépenses supportées tant que l'invention n'a pas eu lieu.

On examine dans cette section le cas où la dépense de R&D a la dimension d'un coût fixe initial représentant *l'échelle de la R&D* (Loury, 1979).

### Un jeu de concurrence en R&D.

Considérons la situation où  $n$  entreprises identiques sont engagées dans une course à l'innovation. Avant que la course ne s'engage chaque firme décide d'allouer un certain budget à la recherche. Une stratégie de l'entreprise  $i$  est donnée par le montant  $x_i$  de dépense en recherche qu'elle engage au début de la course, de façon irréversible. On suppose que les  $n$  entreprises commencent la course à la même date 0. La première à avoir obtenu la découverte obtient une valeur  $V$  supposée exogène. Cette valeur représente le montant de revenu que peut s'approprier le vainqueur de la course, par exemple en obtenant un brevet et en le licenciant à un tiers. La course à l'innovation est modélisée comme un tournoi : seul le vainqueur perçoit  $V$  et les perdants de la course ne s'approprient aucun revenu en imitant l'innovateur par exemple. On suppose également que le taux d'actualisation  $r$  est commun aux  $n$  firmes. Ainsi, si  $t$  est la date à laquelle le vainqueur de la course achève l'innovation et la met sur le marché, la valeur actualisée à la date 0 de l'innovation obtenue en  $t$  est  $Ve^{-rt}$ .

Les paramètres du modèle sont donc au nombre de trois: le taux d'intérêt  $r$ , le nombre  $n$  de firmes actives participant à la concurrence en R&D et la valeur  $V$  de l'innovation que s'approprie le vainqueur de la course.

On note le vecteur de dépenses respectives en R&D des  $n$  firmes par  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et on cherche à représenter la situation de concurrence en R&D comme un jeu non coopératif afin d'analyser les fonctions de meilleure réponse et de caractériser l'équilibre de Nash du jeu correspondant.

Notons  $\tau_i = \min_{j \neq i} [\tau(x_j)]$ . La variable aléatoire  $\tau_i$  est la date d'achèvement de l'innovation par l'un quelconque des concurrents de  $i$ . On suppose qu'il n'y a aucune externalité dans le processus de R&D de sorte que les variables aléatoires  $\tau(x_j)$  sont indépendantes et identiquement distribuées selon des lois de Poisson dont les paramètres sont donnés par  $T(x_j), j = 1, \dots, n$

Dans ce cas, la variable aléatoire  $\tau_i = \min_{j \neq i} [\tau(x_j)]$  a une distribution qui est aisément déterminée. En effet:

$$\Pr[\tau_i \leq t] = 1 - \Pr[\tau_i > t] = 1 - \Pr[\tau(x_j) > t, \forall j \neq i] = 1 - \prod_{j \neq i} \{\Pr[\tau(x_j) > t]\}.$$

$$\text{Donc } \Pr[\tau_i \leq t] = 1 - \prod_{j \neq i} \{\exp(-T(x_j)t)\} = 1 - \exp(-(\sum_{j \neq i} T(x_j))t)$$

La probabilité pour qu'aucun concurrent de  $i$  n'ait réalisé une découverte avant  $t$

est donnée par:

$$\Pr[\tau_i > t] = \exp(-(\sum_{j \neq i} T(x_j))t).$$

Si la firme  $i$  investit  $x_i$  et fait une découverte entre  $t$  et  $t + dt$  avec  $t \in [0, \infty[$ , cette firme est le vainqueur de la course à l'innovation si et seulement si aucune autre firme n'a fait de découverte avant la date  $t$ . La probabilité pour que la firme  $i$  gagne la course entre  $t$  et  $t + dt$  est donc donnée par

$$\Pr\{\tau(x_i) \in [t, t + dt] \text{ et } \tau_i > t\} = \Pr\{\tau(x_i) \in [t, t + dt] / \tau_i > t\} \times \Pr\{\tau_i > t\}.$$

Comme les deux évènements  $\{\tau(x_i) \in [t, t + dt]\}$  et  $\{\tau_i > t\}$  sont indépendants, on a:

$$\Pr\{\tau(x_i) \in [t, t + dt] \text{ et } \tau_i > t\} = T(x_i) \exp[-(\sum_{k=1}^{k=n} T(x_k)t)]dt.$$

Comme  $t \in [0, \infty[$ , que la valeur actualisée à la date 0 d'une valeur  $V$  disponible à la date  $t$  est  $Ve^{-rt}$  et que la dépense  $x_i$  a lieu en 0, l'espérance du gain actualisé à la date 0 de la firme  $i$  s'écrit :

$$G_i(x_1, \dots, x_n) = \int_0^{\infty} Ve^{-rt} T(x_i) \exp[-(\sum_{k=1}^{k=n} T(x_k)t)]dt - x_i$$

soit

$$G_i(x_1, \dots, x_n) = \int_0^{\infty} VT(x_i) \exp\{-[r + \sum_{k=1}^{k=n} T(x_k)]t\}dt - x_i$$

On obtient ainsi par simple intégration:

$$G_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{VT(x_i)}{r + T(x_i) + \sum_{j \neq i} T(x_j)} - x_i.$$

L'expression qui figure au dénominateur  $r + T(x_i) + \sum_{j \neq i} T(x_j)$  s'interprète comme le *taux d'actualisation généralisé* : c'est la somme du taux d'actualisation  $r$  et des taux de hasard de chacune des firmes participant à la course  $T(x_i) + \sum_{j \neq i} T(x_j)$ . C'est

donc la somme de  $r$  et de l'inverse de la date espérée de succès (par l'une quelconque des firmes). Plus la date espérée de succès est éloignée, plus la firme renonce à des revenus immédiats pour des profits futurs à une date plus éloignée. L'inverse de la date moyenne de découverte a donc bien la dimension d'un taux d'intérêt.

Rappelons que dans la formulation adoptée dans ce paragraphe (course à l'innovation avec effet d'échelle), l'investissement en R&D a lieu une fois pour toutes à la date 0. C'est ce qui explique que dans l'expression précédente, la dépense  $x_i$  ne soit pas elle-même actualisée.

Nous avons ainsi représenté la situation de concurrence en R&D comme un jeu

sous forme normale  $\Gamma = \{N, S_i, G_i\}$  où  $N = \{1, \dots, n\}$  représente l'ensemble des joueurs (firmes),  $S_i = [0, \infty[$  représente l'ensemble des stratégies  $x_i$  du joueur  $i$  et  $G_i(x_i, x_{-i})$  est la fonction d'espérance de gain du joueur  $i$  définie dans l'ensemble  $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

## Propriétés des fonctions de meilleure réponse.

Remarquons d'abord que dans l'expression du gain  $G_i$  de la firme  $i$ , les décisions des concurrents apparaissent sous la forme agrégée  $\sum_{j \neq i} T(x_j)$ . Notons

$T_{-i} = \sum_{j \neq i} T(x_j)$ . La variable  $T_{-i}$  représente l'effort agrégé des concurrents de  $i$ . Pour

alléger les notations, écrivons  $G_i(x_i, T_{-i})$  le gain actualisé d'une firme  $i$  dépensant  $x_i$  face à des concurrents dont l'effort de recherche agrégé est résumé par le taux de hasard agrégé  $T_{-i}$ .

La fonction de meilleure réponse de la firme  $i$  est définie par:

$$\hat{x}_i(T_{-i}) = \underset{x_i \geq 0}{\text{Arg Max}} G_i(x_i, T_{-i}) = \underset{x_i \geq 0}{\text{Arg Max}} \left\{ \frac{VT(x_i)}{r + T(x_i) + T_{-i}} - x_i \right\}$$

La condition du premier ordre (CPO) que doit satisfaire une solution intérieure ( $\hat{x}_i(T_{-i}) > 0$ ) est donnée par  $\frac{\partial G_i}{\partial x_i} = 0$ . Cette condition s'écrit:

$$\frac{T'(\hat{x}_i)(r + T_{-i})}{[r + T_{-i} + T(\hat{x}_i)]^2} = \frac{1}{V}$$

La condition du second ordre (CSO) pour que la solution  $\hat{x}_i(T_{-i})$  corresponde bien à un maximum de  $G_i$  est:  $\frac{\partial^2 G_i}{(\partial x_i)^2} \leq 0$ . Cette condition s'écrit:

$$T''(\hat{x}_i)[r + T_{-i} + T(\hat{x}_i)] - 2[T'(\hat{x}_i)]^2 \leq 0$$

Par le théorème des fonctions implicites, la CPO définit une fonction de meilleure réponse de la firme  $i$ , notée  $\hat{x}_i(T_{-i})$ , dont nous recherchons les propriétés.

Remarquons d'abord que la fonction de meilleure réponse  $\hat{x}_i(T_{-i})$  dépend en fait des deux paramètres  $r$  et  $V$ , de sorte que la première question à examiner est celle de l'influence de ces deux paramètres sur la fonction de meilleure réponse. Le lemme suivant apporte une réponse à cette première question.

**Lemma** Les fonctions de meilleure réponse sont telles que  $\frac{\partial \hat{x}_i(r, T_{-i}, V)}{\partial r} < 0$  et  $\frac{\partial \hat{x}_i(r, T_{-i}, V)}{\partial V} > 0$

**Preuve:** Le lemme est obtenu en différentiant la CPO par rapport à  $r$  d'abord puis par rapport à  $V$ .

*Interprétation:*

La dépense de R&D de la firme  $i$  à la date 0 décroît avec le taux d'actualisation  $r$ , puisque plus celui-ci est élevé, plus le coût de renoncer à des gains immédiats pour des gains futurs et aléatoires est élevé. Un taux d'intérêt élevé n'est donc jamais un facteur favorable pour l'investissement en recherche.

De même, pour des raisons évidentes, la dépense de R&D de la firme  $i$  à la date 0 croît avec la valeur de l'innovation  $V$ .

Il nous faut à présent étudier comment varie la meilleure réponse  $\hat{x}_i(T_{-i})$  en

fonction de  $T_{-i}$ , c'est à dire en fonction du comportement agrégé des concurrents ( $T_{-i} = \sum_{j \neq i} T(x_j)$ ). C'est une question importante qui concerne le lien entre innovation et concurrence.

Rappelons ici les terminologies classiques de *compléments stratégiques* et de *substituts stratégiques*.

Si  $\frac{d\hat{x}_i(T_{-i})}{dT_{-i}} > 0$ , on dit que les dépenses de R&D sont des *compléments stratégiques* (CS). Cela signifie qu'un accroissement de  $T_{-i}$  et donc de l'effort agrégé des concurrents conduit à une hausse de la dépense  $\hat{x}_i$  de la firme  $i$ . Un comportement plus vigoureux des concurrents d'une firme en matière de R&D stimule l'activité de R&D de la firme. La fonction de meilleure réponse  $\hat{x}_i(T_{-i})$  croît avec  $T_{-i}$  : elle est de pente positive.

Si  $\frac{d\hat{x}_i(T_{-i})}{dT_{-i}} < 0$ , on dit que les dépenses de R&D sont des *substituts stratégiques* (CS). Dans ce cas, un accroissement de la dépense agrégée des concurrents provoque une baisse de la dépense  $\hat{x}_i$  de la firme  $i$ . Cela revient à dire qu'un comportement plus vigoureux des concurrents d'une firme en matière de R&D décourage l'activité de R&D de la firme. La fonction de meilleure réponse  $\hat{x}_i(T_{-i})$  décroît avec  $T_{-i}$  : elle est de pente négative.

Pour savoir dans quel cas on se trouve, il faut donc calculer le signe de  $\frac{d\hat{x}_i(T_{-i})}{dT_{-i}}$ .

Partons de la CPO et dérivons l'équation correspondante par rapport à  $T_{-i}$ . Il vient :

$$T''(r + T_{-i}) \frac{d\hat{x}_i}{dT_{-i}} + T' = \frac{2}{V} [1 + T' \frac{dx_i}{dT_{-i}}] [r + T_{-i} + T]$$

De là on tire :

$$\frac{d\hat{x}_i}{dT_{-i}} [T''(r + T_{-i}) - \frac{2}{V} T'(r + T_{-i} + T)] = \frac{2}{V} (r + T_{-i} + T) - T'$$

Multiplions les deux membres par  $(r + T_{-i} + T)$  et réutilisons la CPO. On obtient

$$\frac{d\hat{x}_i}{dT_{-i}} (r + T_{-i}) [T''(r + T_{-i} + T) - 2(T')^2] = T'(r + T_{-i} - T).$$

En utilisant la CSO, on a  $T''(r + T_{-i} + T) - 2(T')^2 \leq 0$ . Comme  $T' > 0$ , on aboutit à l'égalité de signes :

$$\text{Si} \left[ \frac{d\hat{x}_i}{dT_{-i}} \right] = \text{Si} [T(\hat{x}_i) - r - T_{-i}]$$

On a ainsi démontré le lemme suivant :

**Lemma** Si  $T(\hat{x}_i) > r + T_{-i}$  alors  $\frac{d\hat{x}_i}{dT_{-i}} > 0$  et les dépenses en R&D sont des *compléments stratégiques*. Si  $T(\hat{x}_i) < r + T_{-i}$  alors  $\frac{d\hat{x}_i}{dT_{-i}} < 0$  et les dépenses en R&D sont des *substituts stratégiques*.

Ces conditions s'écrivent de manière équivalente, en introduisant la fonction inverse  $T^{-1} = C$  :

$$\hat{x}_i > C[r + T_{-i}] \Rightarrow \frac{d\hat{x}_i}{dT_{-i}} > 0 \Rightarrow \text{les dépenses en R\&D sont des CS}$$

$$\hat{x}_i < C[r + T_{-i}] \Rightarrow \frac{d\hat{x}_i}{dT_{-i}} < 0 \Rightarrow \text{les dépenses en R\&D sont des SS}$$

Les conditions précédentes expriment que la fonction  $T_{-i} \rightarrow C(r + T_{-i})$  agit comme une *séparatrice* dans l'espace  $(T_{-i}, x_i)$ .

Considérons en effet dans cet espace le graphe de la fonction  $T_{-i} \rightarrow x_i = C(r + T_{-i})$  où on porte en abscisse l'effort agrégé  $T_{-i}$  des concurrents de  $i$  et en ordonnée la dépense  $x_i$ . Les conditions trouvées expriment que si un couple  $(T_{-i}, \hat{x}_i)$  est en dessous du graphe de  $C$  (i.e.  $\hat{x}_i < C(r + T_{-i})$ ), la fonction de meilleure réponse  $\hat{x}_i(T_{-i})$  décroît avec  $T_{-i}$  et les dépenses de R&D sont des substituts stratégiques, tandis que si le couple  $(T_{-i}, \hat{x}_i)$  est au dessus du graphe de  $C$ , la fonction de meilleure réponse  $\hat{x}_i(T_{-i})$  croît avec  $T_{-i}$  et les dépenses de R&D sont des compléments stratégiques.

L'interprétation est simple. Si la dépense optimale en recherche de  $i$  est inférieure au coût de l'effort agrégé  $(r + T_{-i})$  que supportent les concurrents, la firme  $i$  n'a pas intérêt à suivre un accroissement de cet effort. En revanche, si la dépense optimale en recherche de  $i$  est supérieure au coût de l'effort agrégé  $(r + T_{-i})$  que supportent les concurrents, alors la firme a intérêt à maintenir son leadership en accroissant son propre effort en réponse à un accroissement de l'effort de ses concurrents : sa fonction de meilleure réponse  $\hat{x}_i(T_{-i})$  croît avec  $T_{-i}$  et les dépenses de R&D sont des compléments stratégiques.

Ceci revient donc à dire que ce qui compte pour déterminer si les dépenses de R&D sont des substituts stratégiques ou des compléments stratégiques, c'est la position relative de la dépense d'une firme par rapport au coût de l'effort agrégé des concurrents. Tant que sa position relative est avantageuse, une firme a intérêt à agir agressivement vis à vis de ses concurrents. Par contre, dès que sa position relative est désavantageuse, une firme a intérêt à baisser son propre effort en réponse à un accroissement de l'effort agrégé des concurrents.

Tout ceci ne nous permet pas encore de savoir exactement comment se situe une firme par rapport à ses concurrents, sachant que dans ce modèle toutes les firmes sont identiques.

Introduisons alors les deux couples de points suivants situés tous les deux sur l'axe  $T_{-i} = 0$ .

Le premier couple  $(T_{-i} = 0, \hat{x}_i(0))$  donne la dépense optimale de  $i$  lorsque  $i$  est en situation de monopole. Par définition, en l'absence d'effort des concurrents ( $T_{-i} = 0$ ), on a  $\hat{x}_i(0) = \underset{x}{\text{Arg Max}} \left[ \frac{V e^{-T(x)}}{r + T(x)} - x \right]$ . La dépense  $\hat{x}_i(0)$  représente donc la dépense optimale en R&D d'un monopole confronté à une innovation de valeur  $V$  et dont la date de découverte est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre  $T(x)$ .

Le deuxième couple  $(T_{-i} = 0, x = C(r))$  représente la dépense correspondant à un effort juste égal au taux d'actualisation  $r$ . Cette dépense est donnée par l'ordonnée à l'origine du graphe de la fonction séparatrice  $T_{-i} \rightarrow C(r + T_{-i})$ .

Comparons alors les positions relatives de ces deux couples de points sur l'axe  $T_{-i} = 0$ .

Deux cas sont à distinguer selon que  $\hat{x}_i(0)$  est inférieur ou supérieur à  $C(r)$ .

1er cas :  $C(r) \geq \hat{x}_i(0)$

Ce cas est celui où la dépense pour disposer d'une probabilité de réussite  $r$  est supérieure ou égale à la dépense d'un monopole. On a vu que la fonction de meilleure réponse  $\hat{x}_i(T_{-i})$  est localement décroissante au voisinage de  $T_{-i} = 0$ . Etant en dessous du graphe de  $C(r + T_{-i})$  au voisinage de  $T_{-i} = 0$  et, le graphe de  $C(r + T_{-i})$  étant lui-même croissant en  $T_{-i}$ , la fonction de meilleure réponse  $\hat{x}_i(T_{-i})$  reste donc en dessous de  $C(r + T_{-i})$  pour toute valeur de  $T_{-i}$ . On en déduit que la fonction de meilleure réponse  $\hat{x}_i(T_{-i})$  est une fonction décroissante de  $T_{-i}$ . On est ainsi dans une situation où les dépenses de R&D sont des *substituts stratégiques*. Plus les concurrents accroissent leurs dépenses en R&D, plus la firme  $i$  a intérêt à réduire la sienne. On comprend pourquoi, confrontée à des concurrents actifs en R&D, la firme  $i$  n'ait pas intérêt à les suivre à la hausse dans ce cas: sa dépense optimale en l'absence de concurrents est inférieure à la dépense nécessaire pour s'assurer une probabilité de réussite  $r$ , donc sa dépense optimale en présence de concurrents ayant un effort agrégé donné par  $T_{-i}$  est inférieure à la dépense nécessaire pour s'assurer une probabilité de réussite  $r + T_{-i}$ .

2ème cas:  $C(r) < \hat{x}_i(0)$

La dépense pour disposer d'une probabilité de réussite  $r$  est inférieure à la dépense d'un monopole. Dans ce cas, on a vu que la fonction de meilleure réponse  $\hat{x}_i(T_{-i})$  de la firme  $i$  est localement croissante au voisinage de  $T_{-i} = 0$ . Le graphe de cette fonction de meilleure réponse se situe donc au dessus du graphe de  $C(r + T_{-i})$  au voisinage de  $T_{-i} = 0$ , Mais par ailleurs, on sait que  $\lim_{T_{-i} \rightarrow \infty} \hat{x}_i(T_{-i}, r, V) = 0$ . Donc la courbe localement croissante  $\hat{x}_i(T_{-i})$  au voisinage de  $T_{-i} = 0$  va nécessairement couper le graphe de  $C(r + T_{-i})$  en une certaine valeur  $\tilde{T}_{-i}$  pour décroître ensuite pour des valeurs supérieures de  $T_{-i}$ . Donc les dépenses de R&D sont d'abord des compléments stratégiques pour devenir ensuite des substituts stratégiques à partir d'un certain niveau d'engagement des concurrents.

On a ainsi obtenu le résultat suivant:

**Lemma** Si  $\hat{x}_i(0) = \text{Arg Max}_x \left[ \frac{Ve^{-T(x)}}{r+T(x)} - x \right] \leq C(r)$ , la fonction de meilleure réponse  $\hat{x}_i(T_{-i})$  est décroissante en  $T_{-i}$  et les dépenses de R&D sont des substituts stratégiques. Si  $\hat{x}_i(0) = \text{Arg Max}_x \left[ \frac{Ve^{-T(x)}}{r+T(x)} - x \right] > C(r)$ , la fonction de meilleure réponse  $\hat{x}_i(T_{-i})$  est d'abord croissante en  $T_{-i}$  jusqu'à un seuil  $\tilde{T}_{-i}$  puis devient décroissante en  $T_{-i}$ . Dans ce cas, les dépenses de R&D sont d'abord des compléments stratégiques et deviennent ensuite des substituts stratégiques.

## Equilibre non coopératif symétrique: analyse de court terme

Ayant caractérisé les propriétés des fonctions de meilleure réponse, on est en mesure d'analyser l'équilibre de Nash symétrique du jeu. C'est un équilibre de court terme dans la mesure où le nombre  $n$  de firmes intervenant dans la course à l'innovation est supposé fixé. On recherche un équilibre symétrique de court terme,

i.e.  $x_1^* = x_2^* = \dots = x_n^* = x^*$ .

A l'équilibre symétrique on a donc

$$T_{-1}(x^*) \equiv (n-1)T(x^*)$$

La valeur commune  $x^*(n)$  de la dépense de R&D des  $n$  firmes satisfait donc l'équation suivante, exprimant que l'équilibre de Nash est un point fixe :

$$x^*(n) = \hat{x}[(n-1)T(x^*(n))]$$

Si un équilibre de Nash symétrique existe, cette équation définit la dépense commune  $x^*(n)$  qui dépend du nombre de firmes  $n$ , mais aussi des paramètres  $r$  et  $V$ .

Concernant l'existence d'un équilibre symétrique avec dépenses de R&D positives, remarquons que si les dépenses de R&D sont des substituts stratégiques et si  $x^*(n)$  est une fonction décroissante de  $n$  (propriétés que nous démontrons plus loin), il suffit que  $x^*(1)$  soit positif pour qu'un équilibre de dépense de R&D positives avec  $n$  firmes existe. Mais  $x^*(1) = \hat{x}(0)$ . Donc une condition suffisante d'équilibre intérieur avec  $n$  firmes actives en R&D est  $\hat{x}(0) > 0$ .

Avant d'énoncer un certain nombre de propriétés de l'équilibre non coopératif, on établit un lemme important selon lequel à l'équilibre, les dépenses de R&D sont nécessairement des substituts stratégiques.

**Lemma** *A l'équilibre non coopératif comportant au moins deux firmes ( $n \geq 2$ ), on a nécessairement  $\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial T_{-i}} < 0$ .*

**Preuve:**

Prenons  $i = 1$ . Si à l'équilibre on avait  $\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial T_{-1}} > 0$ , on aurait  $\hat{x}[(n-1)T(x^*(n))] > C(r + (n-1)T(x^*(n)))$  car la courbe de meilleure réponse est au dessus de la séparatrice  $C$  lorsque les dépenses sont des compléments stratégiques. On aurait donc :  $T\{\hat{x}[(n-1)T(x^*(n))]\} > r + (n-1)T(x^*(n))$ . Mais  $\hat{x}[(n-1)T(x^*(n))] = x^*$ . Donc on aurait  $T(x^*(n)) > r + (n-1)T(x^*(n))$ , ce qui entraînerait  $T(x^*(n))[2-n] > r$ , ce qui est impossible si  $n \geq 2$  et  $r \geq 0$ . CQFD

On peut à présent déterminer l'effet de la concurrence, mesurée ici par le nombre  $n$  de firmes participant à la course, sur le montant de la recherche individuelle à l'équilibre. Dans ce modèle où la dépense de recherche est appréhendée par un effet d'échelle, nous montrons que le montant de la recherche individuelle décroît avec  $n$ . C'est l'objet de la proposition suivante.

**Proposition** *A l'équilibre symétrique du jeu de concurrence en R&D entre  $n$  firmes ( $n \geq 2$ ) avec effet d'échelle, le montant de dépense individuelle de recherche  $x^*(n)$  décroît avec  $n$ .*

**Preuve:**

Partons de la définition d'un équilibre symétrique  $x^*(n) = \hat{x}[(n-1)T(x^*(n))]$ . Traitons  $n$  comme une variable continue et différencions cette équation par rapport à  $n$ . On continue à supposer  $i = 1$ . Pour  $n \geq 2$ , on obtient:

$$\frac{dx^*(n)}{dn} = \frac{\frac{\partial \hat{x}}{\partial T_{-1}} T(x^*(n))}{1 - (n-1)T'(x^*(n)) \frac{\partial \hat{x}}{\partial T_{-1}}}$$

D'après le lemme précédent, à l'équilibre non coopératif pour  $n \geq 2$ , on a nécessairement  $\frac{\partial \hat{x}}{\partial T_{-1}} < 0$ .

Mais si  $\frac{\partial \hat{x}}{\partial T_{-1}} < 0$  le dénominateur de cette expression est positif et le numérateur est négatif. Au total  $\frac{dx^*(n)}{dn} < 0$ . CQFD

Saisissons bien la portée de cette proposition. Elle signifie que le degré de concurrence en R&D, mesuré ici par le nombre  $n$  de firmes participant à la course, réduit l'effort de R&D de chaque firme. Une telle propriété, qu'on peut qualifier de Schumpéterienne, signifie que la concurrence en R&D ne favorise pas l'effort individuel de recherche. Il nous faut ici attirer l'attention du lecteur. Alors que dans le chapitre précédent, on a examiné l'influence sur l'incitation à innover de la concurrence sur le marché du produit, la variable dont on étudie l'influence dans ce chapitre est la concurrence en terme d'activité de recherche et non sur le marché du produit. Le résultat auquel nous venons d'aboutir, selon lequel l'effort de R&D que consent une firme est d'autant plus grand qu'il y a peu d'autres firmes engagées dans la même course, n'est cependant pas très robuste. Il repose fondamentalement sur une représentation de la R&D avec effet d'échelle, c'est à dire une représentation où l'investissement en R&D est un coût fixe irréversible réalisé à la date 0.

Examinons à présent l'effet d'un accroissement de  $n$  sur l'espérance de la date de découverte  $\tau(n)$  par l'une des firmes. Deux effets sont en présence. D'une part, l'effort individuel décroît avec  $n$  comme nous venons de le voir. D'autre part, l'effort agrégé, somme des efforts individuels, croît avec  $n$ , comme nous le verrons dans la suite. Il est important d'examiner la résultante de ces deux effets de sens opposé. C'est l'objet de la proposition suivante qui donne une condition suffisante pour que la date de découverte soit en espérance plus rapprochée lorsque  $n$  augmente.

**Proposition** *Sous l'hypothèse que  $-T'(x^*) \frac{d\hat{x}}{dT_{-i}} < 1$ , l'espérance de la date de découverte dans une course au brevet décroît avec le nombre  $n$  de firmes participant à la course.*

**Preuve:**

La date de découverte de l'innovation est une variable aléatoire  $\tau(n)$ , définie par  $\tau(n) = \min(\tau(x_1^*(n)), \dots, \tau(x_n^*(n)))$ . A l'équilibre symétrique, on a  $x_1^*(n) = \dots = x_n^*(n) = x^*(n)$ . Comme les variables aléatoires  $\tau(x_k^*(n))$  pour  $k = 1, \dots, n$  sont indépendantes et identiquement distribuées avec  $E(\tau(x_k^*(n))) = E(\tau(x^*(n))) = \frac{1}{T(x^*(n))}$  pour  $k = 1, \dots, n$ , on a :

$$E[\tau(n)] = \frac{1}{nT(x^*(n))}$$

On est donc amené à étudier le sens de variation de la fonction  $n \rightarrow nT(x^*(n))$ .



On a :

$$\frac{d[nT(x^*(n))]}{dn} = T(x^*(n)) + nT'(x^*(n)) \frac{dx^*(n)}{dn}$$

Or on a établi que

$$\frac{dx^*(n)}{dn} = \frac{\frac{d\hat{x}}{dT_{-1}} T(x^*(n))}{1 - (n-1)T'(x^*(n)) \frac{d\hat{x}}{dT_{-1}}}$$

Donc

$$\frac{d[nT(x^*(n))]}{dn} = T(x^*(n)) \left[ 1 + \frac{nT'(x^*(n)) \frac{d\hat{x}}{dT_{-1}}}{1 - (n-1)T'(x^*(n)) \frac{d\hat{x}}{dT_{-1}}} \right]$$

Il en résulte que

$$\frac{d[nT(x^*(n))]}{dn} > 0 \Leftrightarrow -T'(x^*) \frac{d\hat{x}}{dT_{-1}} < 1$$

CQFD.

Ainsi, dans ce modèle intégrant l'effet d'échelle de la recherche, l'effort individuel de R&D ( $x^*(n)$ ) décroît avec le nombre  $n$  de concurrents mais l'effort global de R&D  $nx^*(n)$  croît avec  $n$  si la condition précédente est satisfaite. La probabilité globale de découverte instantanée ( $nT(x^*(n))$ ) croît également avec  $n$  et la date de découverte  $\tau(n)$  a une espérance  $E[\tau(n)] = \frac{1}{nT(x^*(n))}$  d'autant plus proche que  $n$  est élevé.

Interprétons la condition  $(-T'(x^*) \frac{\partial \hat{x}}{\partial T_{-1}} < 1)$  sous laquelle ce résultat a été établi.

Elle revient à dire que la valeur absolue de la pente de la fonction de meilleure réponse d'une firme est strictement inférieure à 1. Plaçons nous à l'équilibre  $x^*$  et supposons qu'à partir de leur position d'équilibre l'effort agrégé des concurrents de la firme 1 s'accroisse d'une unité. On a vu qu'à l'équilibre les dépenses sont des substituts stratégiques. La condition revient à dire que face à une augmentation agrégée de R&D d'une unité, la firme 1 réagit en abaissant son propre effort de R&D d'un montant moindre:  $-T'(x^*) \frac{\partial \hat{x}}{\partial T_{-1}} < 1$ . C'est bien une condition de stabilité de l'équilibre non coopératif.

## Equilibre non coopératif de long terme : libre entrée.

Jusqu'à présent, on a considéré le nombre  $n$  de firmes participant à la course comme un paramètre exogène. Quels résultats obtient-on si on endogénéise ce nombre  $n$  par une condition de *libre entrée*? La réponse à cette question permet de caractériser l'équilibre de concurrence en R&D de long terme.

Partons de l'expression de l'espérance de profit d'une firme donnée par

$$G_i = \frac{VT(x_i)}{r+T(x_i)+T_{-i}} - x_i.$$

Remplaçons  $V$  par son expression tirée de la CPO donnée par  $\frac{T'(\hat{x})(r+T_{-i})}{[r+T_{-i}+T(\hat{x})]^2} = \frac{1}{V}$ .

Remplaçons  $T_{-i}$  par sa valeur à l'équilibre  $T_{-i} = (n-1)T(x^*)$ .

Ces manipulations permettent de réexprimer l'espérance de profit d'une firme par :

$$G = \frac{T(x^*)}{T'(x^*)} \left[ \frac{r + nT(x^*)}{r + (n-1)T(x^*)} \right] - x^*$$

Donc, la condition exprimant que l'espérance de profit  $G$  d'une firme représentative est positif ou nul à l'équilibre de long terme s'écrit ;

$$G \geq 0 \Leftrightarrow \frac{T(x^*)}{x^*} \geq T'(x^*) \left[ \frac{r + nT(x^*)}{r + (n-1)T(x^*)} \right].$$

Or, pour toute valeur finie de  $n$  on a  $\frac{r+nT(x^*)}{r+(n-1)T(x^*)} > 1$ . Donc, avec un nombre fini de firmes, on a  $\frac{T(x^*)}{x^*} \geq T'(x^*) \left[ \frac{r+nT(x^*)}{r+(n-1)T(x^*)} \right] \Rightarrow \frac{T(x^*)}{x^*} > T'(x^*)$ . Donc, à l'équilibre avec libre entrée comportant un nombre fini de firmes, la technologie de recherche est à rendements strictement décroissants. La condition  $\frac{T(x^*)}{x^*} > T'(x^*)$  implique alors qu'il existe un nombre de firmes actives  $n$  tel que l'espérance de profit  $G$  de chaque firme active est strictement positive. Cependant, il se peut que l'équilibre de long terme comporte un nombre infini de firmes. Dans ce cas,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r+nT(x^*)}{r+(n-1)T(x^*)} = 1$  et l'équilibre peut se réaliser au point  $x^* = \bar{x}$  en lequel  $\frac{T(x^*)}{x^*} = T'(x^*)$ . L'équilibre de long terme comporte alors un nombre infini de firmes dont l'espérance de profit est nulle. On aboutit ainsi à la proposition suivante

**Proposition** *Si l'équilibre se situe dans la zone où la technologie de R&D présente des rendements d'échelle décroissants alors l'espérance de profit avec libre entrée conduit à un profit individuel positif qui ne s'annule qu'à la limite lorsque le nombre de firmes tend vers l'infini.*

Revenons à présent au cas général où la technologie de R&D présente d'abord des rendements d'échelle croissants pour des faibles valeurs de  $x$  avant qu'apparaissent des rendements d'échelle décroissants pour des valeurs plus élevées de  $x$ . Deux cas sont alors possibles.

1. Soit l'équilibre avec libre entrée se produit dans la zone des rendements d'échelle croissants et, dans ce cas, le profit d'une firme représentative avec libre entrée peut devenir nul, même en présence d'un nombre fini (non nécessairement entier) de firmes.

2. Soit l'équilibre avec libre entrée se produit dans la zone des rendements d'échelle décroissants et, dans ce cas, nous venons de voir que le profit d'une firme représentative avec libre entrée ne devient nul qu'à la limite, c'est à dire lorsque le nombre de firmes tend vers l'infini.

Dans les deux cas, l'espérance de profit décroît avec le nombre de firmes entrées sur le marché de la R&D. Mais, ce qu'il est important de remarquer, c'est que dans le cas où l'équilibre a lieu dans la zone des rendements d'échelle croissants, conduisant à une espérance de profit nulle en présence d'un nombre fini de firmes, chacune d'elles opère en situation de *capacité excédentaire*, c'est à dire en deçà de  $\bar{x}$  où le rendement moyen atteint son maximum. A l'équilibre de libre entrée avec des rendements croissants aucune firme n'exploite l'intégralité des économies d'échelle de la technologie de R&D. Ces résultats font l'objet de la

proposition suivante.

**Proposition** *L'espérance de profit d'équilibre est une fonction décroissante du nombre de firmes participant à la course à l'innovation. Lorsque l'équilibre de long terme (espérance de profit nulle) se réalise avec un nombre fini de firmes, l'équilibre se situe dans la zone où la technologie de R&D est à rendements d'échelle croissants.*

**Preuve:**

Notons  $G(x^*, (n-1)T(x^*))$  l'espérance de profit d'équilibre, sachant que  $x^* = x^*(n)$ . Désignons par  $T_{-1}$  le deuxième argument de la fonction  $G$ . A l'équilibre,  $T_{-1} = (n-1)T(x^*)$ . Dérivons cette espérance de profit d'équilibre par rapport à  $n$ .

$$\frac{dG}{dn} = \frac{\partial G}{\partial x} \frac{dx^*}{dn} + \frac{\partial G}{\partial T_{-1}} [(n-1)T'(x^*) \frac{dx^*}{dn} + T(x^*)]$$

Comme  $x^* = \text{Arg max}_x G(x, T_{-1})$ , on a  $\frac{\partial G}{\partial x} = 0$ , cette dérivée partielle étant évaluée en  $x = x^*$ . De plus, comme  $G(x, T_{-1}) = \frac{VT(x)}{T_{-1} + r + T(x)} - x$ . il en résulte  $\frac{\partial G}{\partial T_{-1}} = -\frac{VT(x)}{[T_{-1} + r + T(x)]^2} < 0$ . Donc  $\text{Si}[\frac{dG}{dn}] = -\text{Si}[(n-1)T'(x^*) \frac{dx^*}{dn} + T(x^*)]$ . Mais on sait que  $x^* = \hat{x}[(n-1)T(x^*)]$ . Donc  $\frac{dx^*}{dn} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial T_{-1}} [T(x^*) + (n-1)T'(x^*) \frac{dx^*}{dn}]$ . Il en résulte :  $\frac{dx^*}{dn} \{1 - [\frac{\partial \hat{x}}{\partial T_{-1}} (n-1)T'(x^*)]\} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial T_{-1}} T(x^*)$ . Or on sait qu'à l'équilibre  $\frac{\partial \hat{x}}{\partial T_{-1}} < 0$ .

On a donc :

$$\text{Si}[(n-1)T'(x^*) \frac{dx^*}{dn} + T(x^*)] = \text{Si}\{(n-1)T'(x^*) \frac{\frac{\partial \hat{x}}{\partial T_{-1}} T(x^*)}{1 - [\frac{\partial \hat{x}}{\partial T_{-1}} (n-1)T'(x^*)]} + T(x^*)\}$$

Le signe de cette dernière expression est donné par :

$\text{Si}\{(n-1)T'(x^*) \frac{\partial \hat{x}}{\partial T_{-1}} T(x^*) + [1 - (n-1)T'(x^*) \frac{\partial \hat{x}}{\partial T_{-1}}] T(x^*)\} = \text{Si}\{T(x^*)\} > 0$ . Donc  $\text{Si}[\frac{dG}{dn}] < 0$ .

L'espérance de profit d'équilibre est donc une fonction décroissante du nombre  $n$  de firmes. Ceci démontre la première partie de la proposition.

Supposons à présent que l'espérance de profit d'équilibre soit strictement positive pour toute valeur finie de  $n$ . Comme  $x^*(n) = \hat{x}[(n-1)T(x^*(n))]$ , on en déduit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^*(n) = 0$ . De plus, on a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{T(x)}{x} = T'(0)$ . On a vu qu'à l'équilibre on a :

$$G(x^*, T_{-1}) = \frac{T(x^*)}{T'(x^*)} \left[ \frac{r + T(x^*) + T_{-1}}{r + T_{-1}} \right] - x^*$$

On en déduit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(x^*(n), (n-1)T(x^*(n))) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(x^*)}{T'(x^*)} \left[ \frac{r + nT(x^*)}{r + (n-1)T(x^*)} \right] = \lim_{x^* \rightarrow 0} \frac{T(x^*)}{T'(x^*)} = \lim_{x^* \rightarrow 0} \frac{T(x^*)}{x^*} \frac{x^*}{T'(x^*)} = 0.$$

Ainsi, on a montré que si l'espérance de profit d'équilibre est strictement positive pour toute valeur finie de  $n$ , alors nécessairement l'espérance de profit d'équilibre tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Supposons à présent qu'il existe un nombre de firmes  $n_0 < \infty$  tel que l'espérance de profit d'équilibre pour  $n_0$  firmes soit nulle :

$$G(x^*(n_0), (n_0-1)T(x^*(n_0))) = 0.$$

Comme  $G(x^*(n_0), T_{-1}) = \frac{T(x^*(n_0))}{T'(x^*(n_0))} \left[ \frac{r+n_0 T(x^*(n_0))}{r+(n_0-1)T(x^*(n_0))} \right] - x^*(n_0) = 0$ , on en déduit:  
 $\frac{T(x^*(n_0))}{x^*(n_0)} = T'(x^*(n_0)) \frac{r+(n_0-1)T(x^*(n_0))}{r+n_0 T(x^*(n_0))} < T'(x^*(n_0))$ . Mais ceci signifie que  $x^*(n_0) < \bar{x}$ , sachant que  $\bar{x}$  est le seuil de R&D en-deça duquel les rendements sont croissants. On a donc montré que si l'espérance de profit d'équilibre était nulle pour un nombre fini de firmes, alors l'équilibre se situe nécessairement dans la zone des rendements croissants. CQFD

## Equilibre de marché et optimum social

Il existe trois raisons à l'origine d'un écart éventuel entre l'équilibre de marché de long terme et l'optimum social.

1. En tout premier lieu, la valeur privée et la valeur sociale d'une innovation peuvent différer. L'innovation donne lieu en général à des externalités appelées "débordements technologiques" (en anglais, "spillovers") qui s'expriment par le fait qu'un innovateur ne parvient pas à s'approprier tous les bénéfices induits par son innovation.

2. En second lieu, comme on l'a vu au chapitre précédent, une course à l'innovation conduit chaque firme à surinvestir en R&D par rapport à ce qu'il serait socialement optimal d'investir. Chaque firme ignore l'impact de son comportement sur les gains de ses concurrents, ce qui entraîne un effort excessif de R&D à l'équilibre non coopératif.

3. Enfin, une troisième source d'écart entre l'équilibre de marché et l'optimum social réside dans le nombre de firmes participant à la course. A l'équilibre de marché de long terme, ce nombre  $n_0$  est tel que  $G[x^*(n_0), (n_0 - 1)T(x^*(n_0))] = 0$ . L'optimum social correspond à un couple  $(\hat{n}, x^{**}(\hat{n}))$  qui maximise en  $n$  la fonction de bien-être  $W(n, x^{**}(n)) = nG[x^{**}(n), (n - 1)T(x^{**}(n))]$ . Il nous faut donc comparer  $n_0$  et  $\hat{n}$ . Supposons que la technologie de R&D fonctionne d'abord à rendements croissants, puis décroissants. En d'autres termes, on suppose que le seuil  $\bar{x}$  est strictement positif. Supposons également que la condition de libre entrée conduise à un nombre fini  $n_0$  de firmes viables. On a vu que dans ce cas, l'équilibre de libre entrée est caractérisé par la propriété de "capacité excédentaire", c'est à dire  $x^*(n_0) < \bar{x}$ . Caractérisons la solution de l'optimum social :

$$(\hat{n}, x^{**}(\hat{n})) \in \underset{(x,n)}{\text{Arg max}} [nG(x, (n - 1)T(x))].$$

On a :  $nG(x, (n - 1)T(x)) = \frac{nVT(x)}{r+nT(x)} - nx$ . La CPO en  $x$  s'écrit donc :  
 $rVT'(x) = [r + nT(x)]^2$ . De même la CPO en  $n$  s'écrit:  $rVT(x) = x[r + nT(x)]^2$ . En combinant ces deux conditions, on obtient :

$$\frac{rVT(x^{**}(\hat{n}))}{x^{**}(\hat{n})} = [r + \hat{n}T(x^{**}(\hat{n}))]^2 = rVT'(x^{**}(\hat{n}))$$

Donc  $\frac{T(x^{**}(\hat{n}))}{x^{**}(\hat{n})} = T'(x^{**}(\hat{n}))$ . On en déduit  $x^{**}(\hat{n}) = \bar{x}$ . Mais on a vu que l'équilibre de libre entrée  $x^*(n_0)$  est caractérisé par la propriété de capacité excédentaire:  $\bar{x} > x^*(n_0)$ . On en déduit  $x^{**}(\hat{n}) > x^*(n_0)$ . Par ailleurs, on a vu qu'à nombre de firmes donné, l'équilibre de marché conduit chaque firme à surinvestir

par rapport à l'optimum social. Par conséquent,  $x^*(n_0) > x^{**}(n_0)$ . On a donc au total  $x^{**}(\hat{n}) > x^{**}(n_0)$ . Comme on sait que  $x^{**}(n)$  est une fonction décroissante de  $n$ , on parvient au résultat suivant :  $\hat{n} < n_0$ .

Le résultat est donc qu'à long terme, le nombre de firmes que génère la libre entrée dans une course au brevet ( $n_0$ ) est excessif par rapport au nombre de firmes que commanderait l'optimum social ( $\hat{n}$ ).

Ainsi, lorsque la R&D est appréhendée au travers de l'effet d'échelle, non seulement le marché génère une dépense individuelle de R&D excessive, mais il conduit en plus un nombre excessif d'entreprises à participer à la course à l'innovation, par rapport à l'optimum social.

Ces résultats sont synthétisés dans la proposition suivante:

**Proposition** *En présence d'une technologie de R&D à effet d'échelle avec des rendements d'abord croissants, puis décroissants, l'équilibre avec libre entrée conduit à un niveau individuel de R&D et à un nombre de firmes qui sont tous les deux excessifs par rapport à l'optimum social.*

L'interprétation est claire. Dans un optimum social, les économies d'échelle doivent être exploitées au maximum. Ceci implique l'existence d'un nombre fini de firmes opérant chacune à la taille minimale efficiente avec une espérance de profit positive pour chacune d'elles. Mais l'existence d'une espérance de profit positif conduit à l'entrée de concurrents et la concurrence se poursuit jusqu'à ce que l'espérance de profit s'annule. Si la condition de profits nuls se trouve réalisée avec un nombre fini de firmes, on est dans la situation de rendements croissants. Le gain de l'innovation à l'équilibre est annulé du fait de la libre entrée. C'est en ce sens que la concurrence est excessive. Ce résultat est identique à celui qu'on a trouvé au chapitre précédent dans le cadre d'une technologie de R&D déterministe. Si la condition d'annulation des profits ne se trouve réalisée qu'à la limite, c'est à dire avec un nombre infini de firmes, le niveau de R&D n'est pas nécessairement optimal puisque les économies d'échelle ne sont pas exploitées. La concurrence est excessive.

## Course à l'innovation avec effet d'intensité.

Lorsque l'investissement en R&D consiste en un flux continu de dépenses, encourues tant que l'innovation n'a pas été réalisée, certains des résultats précédents sont modifiés. A la suite de Lee et Wilde (1980), nous supposons à présent qu'au delà d'un coût fixe initial  $\Lambda$  payé à la date 0 et correspondant aux frais d'établissement d'un laboratoire de recherche, la mise au point de l'innovation nécessite un flux continu de dépenses en R&D, flux qui définit l'intensité de la recherche plutôt que son échelle, comme cela était le cas au paragraphe précédent.

Ainsi, en consacrant un flux continu et constant de dépenses  $x$  tant que l'innovation n'est pas réalisée, une entreprise acquiert une probabilité instantanée de découverte  $T(x)$ . Comme précédemment, la date d'obtention de l'innovation est une variable aléatoire  $\tau(x)$  qui suit une loi de Poisson de paramètre  $T(x)$ . La

technologie de R&D est toujours représentée par la fonction de taux de hasard  $x \rightarrow T(x)$  satisfaisant les propriétés générales énoncées plus haut, mais la variable  $x$  représente à présent un flux de dépense et non un stock.

Le premier effet introduit par ce changement de perspective se traduit par la nouvelle expression de l'espérance de coût actualisé d'une firme participant à une course au brevet. Avec  $n$  firmes participant à la course, chacune d'elles consacrant un flux continu de dépenses, tant que l'innovation n'a pas été réalisée par l'une d'elles, l'espérance des coûts de chaque firme est modifiée.

## Intensité de la recherche : coûts et gains espérés.

L'entreprise  $i$  est soumise à deux types de coûts. D'une part un coût fixe d'installation  $\Lambda$  payé à la date 0. D'autre part, un flux de dépenses  $x_i$  payées tant que la découverte n'est pas réalisée, soit par la firme  $i$  elle-même, soit par l'une de ses concurrentes.

Désignons par  $t$  la date aléatoire de la mise au point de l'innovation. Dans l'intervalle  $[0, t]$  la firme  $i$  encourt donc un coût total actualisé égal à

$$C_i(t) = \int_0^t x_i \exp(-rs) ds = x_i \frac{1 - \exp(-rt)}{r}.$$

L'évènement correspondant à l'apparition d'une découverte dans l'intervalle  $[t, t + dt]$  s'écrit comme l'union de deux évènements.

Le premier (évènement  $A$ ) correspond à la situation où la découverte a été réalisée par la firme  $i$  dans l'intervalle  $[t, t + dt]$ . La densité de probabilité de l'évènement  $A$  est donnée par :

$$\Pr[A] = T(x_i) \exp[-T(x_i)t] dt \exp[-(\sum_{j \neq i} T(x_j))t] = T(x_i) \exp[-(\sum_{k=1}^{k=n} T(x_k))t] dt.$$

Le second (évènement  $B$ ) correspond à la situation où c'est un concurrent de  $i$  qui parvient à réaliser la découverte dans l'intervalle  $[t, t + dt]$ . La densité de probabilité de l'évènement  $B$  est donnée par

$$\Pr[B] = (\sum_{j \neq i} T(x_j) \exp[-(\sum_{k=1}^{k=n} T(x_k))t]) dt.$$

Au total la densité de probabilité de l'évènement  $A \cup B$  dans lequel une découverte est faite dans l'intervalle  $[t, t + dt]$  est la somme des deux densités de probabilités précédentes et est donnée par :

$$\Pr\{\text{découverte} \in [t, t + dt]\} \\ = \Pr[A] + \Pr[B] = [T(x_i) + \sum_{j \neq i} T(x_j)] \{\exp[-T(x_i)t + \sum_{j \neq i} T(x_j)t]\} dt.$$

Posons  $\sum_{j \neq i} T(x_j) = T_{-i}$ . L'espérance actualisée  $EC_i(x_i, x_{-i})$  du coût encouru par

la firme  $i$  jusqu'à la date aléatoire  $t$  ( $t \in [0, \infty[$ ) de réalisation de l'innovation est égale à :

$$EC_i(x_i, x_{-i}) = \int_0^\infty C_i(t) [(T(x_i) + T_{-i}) \exp[-(T(x_i) + T_{-i})t]] dt + \Lambda \\ = \int_0^\infty x_i \frac{1 - \exp(-rt)}{r} [(T(x_i) + T_{-i}) \exp[-(T(x_i) + T_{-i})t]] dt + \Lambda$$

Un calcul immédiat conduit à:

$$EC_i(x_i, x_{-i}) = \frac{x_i}{r + T(x_i) + T_{-i}} + \Lambda$$

Comme l'espérance de la valeur actualisée des gains de la firme  $i$  est inchangée par rapport à ce qui a été calculé à la section 2.3.1, on obtient pour l'espérance de gain de la firme  $i$ , engagée dans une course à l'innovation à  $n$  firmes, lorsque le flux d'investissement de  $i$  est  $x_i$  et celui de ses concurrents  $x_{-i}$  :

$$G_i(x_i, x_{-i}) = \frac{T(x_i)V - x_i}{r + T(x_i) + \sum_{j \neq i} T(x_j)} - \Lambda$$

Dans cette expression, le flux continu de dépense  $x_i$  est actualisé au taux généralisé  $r + \sum_{k=1}^{k=n} T(x_k)$  alors que dans le modèle précédent à effet d'échelle, l'investissement en recherche n'apparaissait que sous la forme d'une dépense initiale non actualisée. C'est là toute la différence entre les deux types de modèles, mais cette différence est suffisamment importante pour générer, comme nous allons le voir, des résultats sensiblement différents.

## Equilibre d'une course avec effet d'intensité de la recherche.

On définit la meilleure réponse de la firme  $i$  par

$$\hat{x} = \underset{x \geq 0}{\text{Arg Max}} G_i(x, T_{-i}) = \underset{x \geq 0}{\text{Arg Max}} \left\{ \frac{VT(x) - x}{r + T(x) + T_{-i}} - \Lambda \right\}.$$

La condition du premier ordre ( $\frac{\partial G_i}{\partial x} = 0$ ) que doit satisfaire un maximum intérieur s'écrit, en adoptant des notations allégées :

$$(VT' - 1)(r + T + T_{-i}) - T'(VT - x) = 0$$

soit encore:

$$(VT'(\hat{x}) - 1)(r + T_{-i}) - (T(\hat{x}) - \hat{x}T'(\hat{x})) = 0$$

On note  $\hat{x}(T_{-i}, r, V)$  la fonction de meilleure réponse de la firme  $i$ . Il est facile de vérifier que cette fonction de meilleure réponse est décroissante par rapport à  $r$  et croissante par rapport à  $V$ . L'interprétation est la même qu'au paragraphe précédent. La nouveauté réside dans la relation de  $\hat{x}$  à  $T_{-i}$ , relation qui traduit, rappelons le, l'influence du degré de rivalité des concurrents sur l'effort de recherche d'une firme. Comme l'analyse qui suit se polarise sur l'étude de cette relation, nous adoptons la notation simplifiée  $\hat{x}(T_{-i})$  pour représenter la fonction de meilleure réponse de la firme  $i$  au comportement agrégé de ses concurrents  $T_{-i} = \sum_{j \neq i} T(x_j)$ .

La condition du second ordre ( $\frac{\partial^2 G_i}{\partial x^2} \leq 0$ ) conduit à :

$$\frac{T''[(r + T_{-i})V + x]}{(r + T + T_{-i})^2} - \frac{2T'[(r + T_{-i})(VT' - 1) - (T - T'x)]}{(r + T + T_{-i})^3} \leq 0.$$

On observe que la condition du second ordre ne peut être satisfaite en  $\hat{x}$  que si le rendement marginal de la recherche est décroissant. On vérifie en effet en utilisant la condition du premier ordre que  $\frac{\partial^2 G_i}{\partial x^2} \leq 0 \Rightarrow T'' \leq 0$ .

Ainsi, dans un contexte où l'investissement en R&D prend la forme d'un flux de

dépense, si un équilibre intérieur existe, il est nécessairement dans la zone des rendements marginaux décroissants.

C'est la première divergence avec le modèle du paragraphe précédent où la dépense avait la nature d'un coût fixe payé à la date 0. Dans un modèle à *effet d'échelle*, nous avons montré que si la technologie de recherche présente une zone initiale de rendements croissants et que l'équilibre avec libre entrée conduit à un nombre fini de firmes, alors nécessairement cet équilibre se situe dans la zone des rendements croissants. Dans un modèle avec *effet d'intensité de la recherche*, nous venons de voir que l'équilibre avec un nombre fini de firmes se situe nécessairement dans la zone des rendements décroissants.

Notons que ce dernier résultat peut être obtenu sans passer par la condition du second ordre. En effet, de la condition du premier ordre, on tire  $V = \frac{(r+T+T_{-1}-xT')}{(r+T_{-i})T'}$ . En reportant cette valeur dans l'expression de l'espérance du profit, on tire:

$$G_i(x_i, x_{-i}) = \frac{T - xT'}{(r + T_{-i})T'} - \Lambda$$

Une condition nécessaire pour que l'espérance du profit soit non négative à l'équilibre est donc :  $T > xT'$ , soit  $\frac{T(x)}{x} > T'(x)$ . Cette condition définit bien la zone des rendements décroissants.

On a ainsi établi la proposition suivante:

**Proposition** *Dans une course à l'innovation avec effet d'intensité, l'équilibre du jeu de concurrence en R&D se situe nécessairement dans la zone des rendements d'échelle décroissants où la productivité marginale  $T'(x)$  de la dépense  $x$  est inférieure à sa productivité moyenne  $\frac{T(x)}{x}$ .*

On va à présent vérifier que dans un modèle avec effet d'intensité, la fonction de meilleure réponse d'une firme est nécessairement à pente positive, ce qui implique que les dépenses de recherche sont des *compléments stratégiques*.

Pour le voir, il suffit de différencier la CPO par rapport à  $T_{-i}$ . On obtient

$$\frac{d\hat{x}}{dT_{-i}} = \frac{1 - VT'}{T''[(r + T_{-i})V + \hat{x}]}$$

On sait qu'à l'équilibre les rendements sont décroissants ( $T'' < 0$ ) de sorte que le dénominateur est négatif. Par ailleurs, la CPO implique que  $VT' - 1$  a le même signe que  $T - xT'$  qui est positif du fait des rendements croissants. Le numérateur de l'expression est donc de signe négatif. On en déduit

$$\frac{d\hat{x}}{dT_{-i}} > 0$$

C'est la seconde divergence par rapport au modèle de course intégrant l'effet d'échelle, dans lequel on a montré que les dépenses de R&D sont des substituts stratégiques. Dans un modèle de course intégrant l'effet de l'intensité de la recherche les dépenses sont des compléments stratégiques. Un accroissement de l'effort de recherche des concurrents stimule l'effort de recherche d'une firme. La rivalité dans la concurrence en R&D est donc stimulante pour la recherche dans ce



type de modèle. La proposition suivante résume ce résultat

**Proposition** *Dans un modèle de course où la recherche intervient par son intensité, les fonctions de meilleure réponse sont à pente positive ( $\frac{d\hat{x}}{dT-i} > 0$ ) et les dépenses de recherche sont donc des compléments stratégiques.*

Examinons à présent l'effet de la concurrence mesurée par le nombre  $n$  de firmes participant à la course à l'innovation. Comme précédemment, un équilibre de Nash symétrique du jeu de concurrence en R&D entre  $n$  firmes est donné par un montant de dépense  $x^*(n)$  défini par  $x^*(n) = \hat{x}((n-1)T(x^*(n)))$ .

On a alors  $\frac{dx^*(n)}{dn} = \frac{d\hat{x}}{dT-i} [T(x^*(n)) + (n-1)T'(x^*(n)) \frac{dx^*(n)}{dn}]$ . Donc :

$$\frac{dx^*(n)}{dn} = \frac{\frac{d\hat{x}}{dT-i} T(x^*(n))}{1 - (n-1)T'(x^*(n)) \frac{d\hat{x}}{dT-i}}$$

On vient de voir que le numérateur est positif puisque  $\frac{d\hat{x}}{dT-i} > 0$ . Le signe du dénominateur détermine alors le sens de variation de  $x^*(n)$  avec  $n$ . Ce résultat fait l'objet de la proposition suivante.

**Proposition** *Dans une course à l'innovation entre  $n$  firmes où le coût dépend de l'intensité de la recherche, une condition suffisante pour que l'intensité individuelle de la recherche à l'équilibre augmente avec le nombre de firmes est que  $(n-1)T'(x^*(n)) \frac{d\hat{x}}{dT-i} < 1$ .*

Cette proposition souligne une nouvelle divergence avec le résultat du modèle intégrant un effet d'échelle dans lequel l'effort individuel décroît avec le nombre de participants. Au contraire, dans un modèle avec effet d'intensité, l'effort individuel de recherche croît avec le nombre de participants (si la condition  $(n-1)T'(x^*(n)) \frac{d\hat{x}}{dT-i} < 1$  est vérifiée). L'intuition de cette différence entre les deux modèles est la suivante.

Dans le modèle de Loury (effet d'échelle), les dépenses de R&D sont irrécupérables en ce sens qu'elles sont intégralement payées au départ. L'équivalent en termes de flux serait que chaque entreprise  $i$  s'engage à payer une somme  $x_i^L$  jusqu'à la fin des temps. Au contraire, dans le modèle de Lee et Wilde (effet d'intensité), les entreprises engagent un flux de dépenses  $x_i^W$  qui s'interrompt avec l'innovation. Le gain espéré d'une firme  $i$  dans le modèle de Lee et Wilde est donné par  $\frac{VT_i - x_i^W}{r+T_i+T-i}$  alors que le gain espéré de la même firme dans le modèle de Loury s'écrit  $\frac{VT_i - \frac{x_i^L(r+T_i+T-i)}{r}}{r+T_i+T-i}$ . On voit que le modèle de Loury inclut une surpondération implicite du coût de la R&D en termes de flux : tout se passe comme si l'entreprise  $i$  s'engageait (virtuellement) à continuer de payer le flux  $x_i^L$  après l'obtention de l'innovation. Alors, plus les concurrents investissent, plus il est probable que la dépense de  $i$  devienne inutile (puisqu'elle revient à déboursier sur une période plus longue pendant laquelle elle ne rapporte aucun gain de façon certaine) ce qui incite  $i$  à moins déboursier : les dépenses en R&D sont des substituts stratégiques dans le modèle de Loury. Cet "effet gaspillage" n'est pas

présent dans le modèle de Lee et Wilde et les dépenses de R&D sont donc des compléments stratégiques.

On déduit de cette proposition que la date de découverte se rapproche en espérance lorsque le nombre de firmes participant à la course augmente:  $E(\tau(n))$  décroît avec  $n$ . Mais on notera que ce résultat s'appliquait déjà dans le modèle où les entreprises se faisaient concurrence en termes d'échelle de production.

## **Application: innovation et concurrence potentielle.**

Nous avons examiné au chapitre précédent la question de l'effet de la concurrence sur le marché du produit sur l'incitation à innover. Dans le cas de deux firmes, il s'agissait de savoir si la firme la plus efficace était plus incitée ou moins incitée à innover que la firme moins efficace. On a vu que la réponse dépendait de l'intensité de la concurrence sur le marché des produits, une intensité assez forte donnant l'avantage à la firme la plus efficace et une intensité plus faible à la moins efficace. Une question analogue se pose à propos de la concurrence potentielle : une firme en place est-elle plus incitée ou moins incitée à introduire une innovation qu'un entrant potentiel ?

En se fondant sur une technologie de R&D déterministe, Gilbert et Newberry (1982) montraient que la firme en place avait une incitation à innover plus élevée pour une raison exclusivement stratégique: la détention d'un brevet peut servir à exclure un concurrent potentiel du marché. Reinganum (1983) a remis en question cet avantage de la firme en place en utilisant une technologie de R&D stochastique incorporant un effet d'intensité de la recherche. Sur le plan de l'analyse, le choix d'une représentation de la technologie de R&D ne semble donc pas indifférent et c'est ce point qui est illustré dans ce paragraphe.

### **Technologie déterministe de la recherche .**

Commençons par présenter le problème en retenant une représentation déterministe. Considérons une firme installée notée  $i$  dont le coût marginal de production supposé constant est noté  $c_0$ .

Une nouvelle technologie permettant de produire au coût marginal  $c < c_0$  est disponible. Un entrant potentiel noté  $e$  est intéressé par cette nouvelle technologie. Lequel des deux agents,  $i$  ou  $e$  est le plus incité à adopter cette technologie? Dans le cadre d'une technologie de la R&D déterministe, cela revient à comparer le différentiel de gain de chacun des deux agents selon l'identité de celui qui adopte la nouvelle technologie. Adoptons les notations suivantes.

Si c'est  $i$  qui adopte la nouvelle technologie, son profit actualisé est  $\pi^m(c)$  et celui de  $e$  est 0 car l'agent  $e$  n'entre pas sur le marché. De manière générale,  $\pi^m(c)$  désigne le profit de monopole d'une firme disposant de la technologie  $c$ . La fonction  $\pi^m(c)$  est décroissante en  $c$ , dans la mesure où le profit de monopole est en général d'autant plus élevé que le coût est faible.

Si c'est  $e$  qui adopte la nouvelle technologie, on note  $\pi_i(c)$  le profit actualisé de  $i$  et  $\pi_e(c)$  le profit actualisé de l'adopteur  $e$ . On suppose que si c'est l'entrant  $e$  qui adopte la technologie, la firme installée  $i$  ne disparaît pas nécessairement du marché. Plus précisément, elle continue de produire au coût  $c_0$  si l'innovation est

*non drastique*, c'est à dire si  $c > \tilde{c}$  où  $\tilde{c}$  est la plus grande valeur de  $c$  telle que  $\pi_i(c) = 0$ . Par contre, si l'innovation est *drastique*, la firme  $i$  sort du marché lorsque  $e$  adopte la nouvelle technologie. Dans le cas d'une innovation drastique on a donc  $\pi_i(c) = 0$  et  $\pi_e(c) = \pi^m(c)$ . Dans le cas d'une innovation non drastique, on a en général  $\pi^m(c) > \pi_i(c) + \pi_e(c)$ , car le profit de monopole est supérieur à la somme des profits des deux duopoleurs.

Par ailleurs, lorsque l'innovation est non drastique, plus  $c$  est faible, plus cela affecte négativement le profit de la firme installée qui n'a pas adopté la nouvelle technologie. De même, plus  $c$  est faible, plus le profit de l'entrant qui a adopté la nouvelle technologie est élevé. On suppose ainsi que lorsque l'innovation est non drastique,  $\pi_i(c)$  est une fonction croissante de  $c$  et  $\pi_e(c)$  est une fonction décroissante de  $c$ .

Lorsque l'innovation est non drastique, i.e.  $c > \tilde{c}$ , la disponibilité à payer l'innovation de la firme installée  $i$  est égale à  $\Delta_i = \pi^m(c) - \pi_i(c)$  tandis que la disponibilité à payer l'innovation de la firme entrante  $e$  est égale à  $\Delta_e = \pi_e(c)$ . Dans ce cas,  $\Delta_i > \Delta_e$  et c'est la firme installée qui est la plus incitée à adopter l'innovation.

Lorsque l'innovation est drastique, i.e.  $c \leq \tilde{c}$ , on a  $\Delta_i = \Delta_e = \pi^m(c)$ . Les deux firmes ont alors la même disponibilité à payer la nouvelle technologie.

Au total, on a  $\Delta_i \geq \Delta_e$ . En l'absence d'incertitude sur l'innovation, une firme installée est au moins aussi incitée qu'un entrant à adopter une nouvelle technologie, car en l'adoptant elle préempte l'entrée du concurrent. C'est là le principal résultat de Gilbert et Newbery (1982).

## Technologie stochastique de la recherche.

Représentons à présent la technologie de recherche comme nous l'avons fait dans ce chapitre par le paramètre  $T(x)$  exprimant le taux de hasard, c'est à dire la probabilité instantanée de découverte en fonction de l'intensité de la recherche  $x$ . On suppose que la technologie de recherche est à rendements décroissants :  $T'(x) > 0, T''(x) < 0 \forall x \in [0, \infty)$  et  $T(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} T'(x)$ .

Notons  $x_i$  et  $x_e$  les efforts de recherche respectifs des firmes  $i$  et  $e$ . Notons  $r$  le taux d'actualisation. Notons enfin le flux instantané de profit de la firme installée avant l'innovation  $\pi_0 = \pi(c_0)$ .

Les espérances de gain actualisé des deux firmes s'écrivent alors, en utilisant l'approche développée en 2.4.1:

$$G_i(x_i, x_e) = \frac{T(x_i)\pi^m(c) + T(x_e)\pi_i(c) + \pi_0 - x_i}{r + T(x_i) + T(x_e)}$$

$$G_e(x_i, x_e) = \frac{T(x_e)\pi_e(c) - x_e}{r + T(x_i) + T(x_e)}$$

Remarquons que le jeu entre les firmes  $i$  et  $e$  n'est plus symétrique, notamment parce que la firme installée  $i$  dispose d'un profit pré-innovation donné par  $\pi_0$  tandis que l'entrant potentiel  $e$  a un profit nul avant l'innovation

Notons les fonctions de meilleure réponse des deux firmes par  $\hat{x}_i(x_e, c, \pi_0, r)$  et

$\widehat{x}_e(x_i, c, r)$ . Un équilibre de Nash est ainsi défini par le couple  $(x_i^*(c, \pi_0, r), x_e^*(c, \pi_0, r))$  tel que

$$\begin{aligned} x_i^*(c, \pi_0, r) &= \widehat{x}_i(x_e^*, c, \pi_0, r); \\ x_e^*(c, \pi_0, r) &= \widehat{x}_e(x_i^*, c, r). \end{aligned}$$

Les conditions du premier ordre pour un équilibre intérieur sont données par :  $\frac{\partial G_i(x_i, x_e)}{\partial x_i} = 0$  et  $\frac{\partial G_e(x_i, x_e)}{\partial x_e} = 0$ . Elles conduisent aux deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} G_i(\widehat{x}_i(x_e)) &= \frac{[T'(\widehat{x}_i)\pi^m(c) - 1]}{T'(\widehat{x}_i)} \\ G_e(\widehat{x}_e(x_i)) &= \frac{[T'(\widehat{x}_e)\pi_e(c) - 1]}{T'(\widehat{x}_e)} \end{aligned}$$

Supposons que les profits des deux firmes sont non négatifs à l'équilibre. On a  $T'(\widehat{x}_i)\pi^m(c) \geq 1$  et  $T'(\widehat{x}_e)\pi_e(c) \geq 1$ .

Montrons d'abord que la présence d'un concurrent potentiel conduit la firme installée à soutenir un effort de recherche plus important qu'en l'absence de concurrent. Ceci fait l'objet du lemme suivant.

**Lemma** *Les fonctions de meilleure réponse sont telles que  $\frac{\partial \widehat{x}_i(x_e)}{\partial x_e} > 0$  et  $\frac{\partial \widehat{x}_e(x_i)}{\partial x_i} \geq 0$ .*

**Preuve:**

En différenciant les conditions du premier ordre et en utilisant le théorème des fonctions implicites, on obtient  $\frac{\partial \widehat{x}_i(x_e)}{\partial x_e} = -\frac{\partial^2 G_i(\widehat{x}_i, x_e)/\partial x_e \partial x_i}{\partial^2 G_i(\widehat{x}_i, x_e)/\partial x_i^2}$ . Du fait de la condition du

second ordre, le dénominateur est négatif. Le numérateur est égal à :

$-T'(x_e)[T'(\widehat{x}_i)(\pi^m(c) - \pi_i(c)) - 1] = -T'(x_e)T'(\widehat{x}_i)[G_i(\widehat{x}_i, x_e) - \pi_i(c)]$ . Comme  $\widehat{x}_i$  est la

meilleure réponse de  $i$  à  $x_e$ , on a  $G_i(\widehat{x}_i, x_e) \geq G_i(0, x_e)$ . Par ailleurs,

$G_i(0, x_e) - \pi_i(c) = \frac{\pi_0 - r\pi_i(c)}{r + T(x_e)}$ . Cette quantité est positive car

$\pi^m(c) > \frac{\pi_0}{r} \forall c$  et  $\frac{\pi_0}{r} > \pi_i(c)$ . Donc  $G_i(0, x_e) - \pi_i(c) > 0$ . On en déduit que  $\frac{\partial \widehat{x}_i(x_e)}{\partial x_e} > 0 \forall x_e$ . On démontre de la même manière que  $\frac{\partial \widehat{x}_e(x_i)}{\partial x_i} \geq 0$ . CQFD

Nous venons de voir que dans ce jeu non symétrique, les dépenses de R&D sont des compléments stratégiques. Démontrons à présent que si l'innovation est drastique et que la firme en place a un profit positif avant l'innovation, alors face à une dépense donnée  $x$ , la meilleure réponse de la firme en place est en dessous de la meilleure réponse de l'entrant.

**Lemma** *Si l'innovation est drastique et  $\pi_0 > 0$ , alors  $\widehat{x}_i(x, c, \pi_0) < \widehat{x}_e(x, c) \forall x > 0$ .*

**Preuve:**

On sait que si l'innovation est drastique,  $\pi_e(c) = \pi^m(c)$  et  $\pi_i(c) = 0$ . La seule différence entre les deux fonctions de meilleure réponse est  $\pi_0$ . Donc si l'innovation est drastique et que  $\pi_0 = 0$ , on a  $\widehat{x}_i(x, c, 0) = \widehat{x}_e(x, c) \forall x$ . En différenciant la condition du premier ordre obtenue pour le joueur  $i$  et en utilisant le théorème des

fonctions implicites, on obtient  $\frac{\partial \hat{x}_i(x_e, c, \pi_0)}{\partial \pi_0} = -\frac{\partial^2 G_i(\hat{x}_i, x_e) / \partial \pi_0 \partial x_i}{\partial^2 G_i(\hat{x}_i, x_e) / \partial x_i^2}$ . A nouveau, du fait de la CSO, le dénominateur est négatif. En revenant à l'expression de  $G_i$ , on trouve que le numérateur est égal à  $T'(x_i)$  qui est positif. On en déduit que  $\frac{\partial \hat{x}_i(x_e, c, \pi_0)}{\partial \pi_0}$  est négatif. Donc  $\hat{x}_i(x, c, \pi_0) < \hat{x}_i(x, c, 0) = \hat{x}_e(x, c) \forall \pi_0 > 0$ . CQFD

La principale proposition du modèle de Reinganum (1983) peut à présent être établie. Elle affirme que si l'innovation est drastique et que  $\pi_0 > 0$ , alors la dépenses de la firme installée est plus faible que celle de l'entrant à l'équilibre.

**Proposition** *Si l'innovation est drastique et que le profit pré-innovation  $\pi_0$  de la firme installée est strictement positif, alors à l'équilibre  $x_i^*(c, \pi_0) < x_e^*(c, \pi_0)$ .*

**Preuve :**

Raisonnons par l'absurde. Si on avait  $x_i^*(c, \pi_0) \geq x_e^*(c, \pi_0)$ , alors par application des deux lemmes précédents, on aurait  $x_e^*(c, \pi_0) = \hat{x}_e(x_i^*(c, \pi_0), c) \geq \hat{x}_e(x_e^*(c, \pi_0), c) > \hat{x}_i(x_e^*(c, \pi_0), c) = x_i^*(c, \pi_0)$ , ce qui conduit à une contradiction. Donc  $x_i^*(c, \pi_0) < x_e^*(c, \pi_0)$ . CQFD

Remarquons que si  $\tilde{c}$  est le seuil de coût au dessous duquel l'innovation  $c$  est drastique ( $c < \tilde{c}$ ), alors par un argument de continuité, la proposition précédente reste vraie même pour une innovation non drastique au voisinage de  $\tilde{c}$ .

Cette importante proposition illustre bien le fait que ce sont souvent de nouvelles entreprises qui sont à l'origine d'innovations radicales. Une interprétation de ce résultat peut être donnée en termes d'*effet de remplacement*. Une firme installée est moins incitée qu'une nouvelle firme à développer l'investissement pour introduire une innovation radicale, car en réduisant son niveau d'investissement, la firme installée réduit certes sa probabilité de gagner mais elle ne perd pas tout. Même si elle ne parvient pas à adopter la nouvelle technologie, elle bénéficie de son profit  $\pi_0$  pendant la période transitoire où elle reste en course avec son nouveau concurrent. Au contraire, l'enjeu de la course pour celui-ci est vital, car tant qu'il n'a pas gagné la course, il n'a aucune autre opportunité de gain.

Au-delà de la question des efforts respectifs en matière de recherche d'une firme installée et d'une nouvelle firme, ce qu'il convient de retenir de l'analyse qui précède, c'est que le choix d'une technologie déterministe ou stochastique pour représenter le processus de l'innovation, n'est pas neutre. La comparaison des résultats différents obtenus avec ces deux types de représentations parle d'elle-même. Certains économistes avancent l'idée qu'une représentation déterministe pourrait convenir à des innovations incrémentales tandis qu'une représentation stochastique semble bien plus appropriée pour des innovations plus radicales. Cette idée nuance les craintes que l'on peut avoir sur l'existence d'un avantage substantiel et persistant des entreprises en place en matière d'innovation. Le modèle de course pour une innovation de procédé montre clairement que de nouveaux entrants sont incités à poursuivre des efforts d'autant plus importants que l'innovation est drastique ou radicale.

## Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre des modèles stochastiques de course à l'innovation dans lesquels la date de succès est une variable aléatoire dont la distribution est affectée par l'investissement en R&D. Ces modèles constituent les instruments de base pour analyser les multiples situations où l'investissement ne garantit pas un résultat certain, où la dimension temporelle est déterminante et où enfin la dimension tournoi est cruciale. Afin d'obtenir des solutions analytiques simples, nous avons restreint l'examen à des modèles dits "sans mémoire" dans lesquels le taux de hasard exprimant la probabilité conditionnelle de succès instantané ne varie pas au cours du temps. Une décision d'investissement affecte le taux de hasard selon une technologie qui présente d'abord des rendements croissants puis décroissants. Nous avons distingué deux formes d'investissement en R&D. La première traite l'investissement comme une dépense fixe initiale qui détermine l'effet d'échelle du projet. La seconde traite l'investissement comme un flux de dépenses dont l'intensité détermine l'issue du tournoi. Ce flux de dépenses dure tant que l'invention et sa transformation en une innovation n'ont pas été réalisées par un participant à la course à l'innovation. Nous avons montré que ces deux formes d'investissement conduisaient à des résultats sensiblement différents. Dans une technologie de R&D avec effets d'échelle, les investissements en R&D des concurrents apparaissent comme des substituts stratégiques, alors que dans une technologie de R&D avec effets d'intensité, les investissements en R&D sont des compléments stratégiques. Les équilibres des jeux représentant une course à l'innovation ont ainsi été caractérisés en fonction de la forme que prennent les dépenses d'investissement. Cela nous a permis d'étudier l'effet de la concurrence en R&D sur l'effort individuel et l'effort collectif et de comparer ces niveaux d'effort obtenus comme des équilibres non coopératifs avec les niveaux d'effort conduisant à un optimum de premier rang. Cela nous a permis également de comprendre pourquoi les résultats liés aux incitations à innover d'une firme installée et d'un entrant diffèrent selon que le tournoi est de nature déterministe ou stochastique.