Ine¢ciences dynamiques

André ZYLBERBERG

July 27, 2007

1 Introduction

L'accumulation du capital se déroule-t-elle de manière optimale dans une économie où tous les marchés fonctionnent de manière parfaitement concurrentielle ? Les théorèmes prouvant l'équivalence entre les optima de Pareto et l'équilibre général d'une économie de concurrence parfaite incitent à donner une réponse positive dès lors que cette accumulation se réalise sans entrave et qu'elle re‡ète un équilibre sur les marchés des fonds prêtables. En réalité, toutes les conditions requises pour établir cette équivalence ne sont pas réunies si l'on tient comptent des caractéristiques à (très) long terme de l'évolution d'une économie. En premier lieu, cette évolution n'ayant a priori pas de …n, le nombre des biens échangés n'est pas borné. Cette absence de limite s'applique d'ailleurs aussi bien à la nature des biens qu'à leur disponibilité dans le temps. De plus, la durée de vie d'un individu ne coïncide évidemment pas avec l'horizon qu'il conviendrait de retenir pour apprécier le bien-être des générations qui se succèdent. En général, un agent privé s'intéresse à sa propre condition et, au moins partiellement, à celle de ses descendants, mais il prend rarement en compte le bien-être de toutes les générations qui vont le suivre dans ses décisions de tous les jours.

Ce chapitre a pour but d'étudier ce divorce potentiel entre le fonctionnement décentralisé d'une économie de concurrence parfaite et son e¢ cacité à long terme, c'est-à-dire son e¤et sur le bien-être de toutes les générations. Pour que les conclusions de cette étude aient un sens, il est nécessaire de s'appuyer sur des fondements microéconomiques explicites puisque les racines du divorce se trouvent dans la di¤érence entre les décisions e¤ectivement prises aujourd'hui par les agents privés et celles qui auraient dues être prises pour que l'évolution de l'économie se déroule de manière favorable à l'ensemble des générations. Dans ces conditions, l'hypothèse d'un agent ayant une durée de vie in…nie n'est pas adaptée car, l'horizon de ses décisions n'étant plus limité, le con‡it entre bien-être à long terme et décisions de court terme risque de disparaître. C'est pourquoi nous adopterons dans ce chapitre la formalisation propre aux modèles dits à "générations imbriquées" (overlapping generations). Ces derniers possèdent la particularité de prendre en compte explicitement les interdépendances pouvant exister entre les générations successives, mais chaque génération y a une durée de vie …nie et sou¤re donc d'une certaine "myopie" lorsqu'il s'agit de l'avenir des autres générations. Cette façon d'aborder les (éventuelles) ine¢cacités liées à l'économie de concurrence parfaite permet de concevoir assez naturellement le rôle de l'Etat et l'étude de certaines mesures de politique économique ou de certaines institutions. Dans ce cadre, l'action de l'Etat devrait faire en sorte que ses propres décisions et celles prises, sous son impulsion, par les agents privés rapprochent le sentier de croissance de l'économie de celui qui est le plus favorable à l'ensemble des générations, et non pas seulement aux générations en vie actuellement.

La section 2 qui suit présente l'architecture générale du modèle à générations imbriquées utilisé tout au long de ce chapitre. La section 3 donne les critères permettant de dé…nir la notion d'optimalité du processus de croissance. Ils seront appliqués dans l'analyse de la politique gouvernementale. Avant d'aborder cette question, la section 4 examine dans quelle mesure un comportement individuel altruiste pourrait rétablir une certaine cohérence entre les décisions des générations successives. En…n, la section 5 étudie comment l'Etat devrait in‡échir l'évolution de l'économie à travers, d'une part, la gestion de la dette publique et, d'autre part, le choix du système de retraite.

2 Un modèle à générations imbriquées

Le modèle à générations imbriquées a été imaginé par Allais (1947) pour expliquer les fondements d'une économie monétaire, mais c'est Samuelson (1958) qui a fourni la version la plus usuelle. Diamond (1965) a montré que ce modèle pouvait également servir à l'étude de l'optimalité de l'équilibre concurrentiel dans un cadre dynamique et des e¤ets de la dette publique. Dans ce qui suit, nous nous appuierons souvent sur la version pédagogique de cette approche présentée dans Michel (1993).

Il y a trois biens dans l'économie. Le bien produit par les entreprises est consommé par les ménages, mais il peut également être accumulé sous forme de capital et devenir ainsi un facteur de production. Le second facteur de production est le travail fourni par les ménages. En…n, les agents ont la possibilité d'o¤rir ou d'acheter des titres.

2.1 Les ménages

Dans sa version la plus simple, le modèle à générations imbriquées admet que chaque agent ne vit que deux périodes baptisées "jeunesse" et "vieillesse". Lorsqu'il est jeune, un agent a la possibilité de travailler, de consommer et d'épargner. Lorsqu'il est vieux , il ne travaille pas et consomme l'intégralité de son épargne (pour des modèles plus généraux, voir Grandmont, 1983, 1985, et Azariadis, 1993). A chaque date t, il y a N_t individus identiques qui naissent et qui forment donc la population active à cette date. Si l'on considère que la croissance de la population se fait à un taux constant et exogène n, l'évolution démographique est résumée par la formule :

$$N_{t+1} = (1 + n)N_t \quad \text{pour tout } t \geq 0, \; N_0 \text{ donné} \tag{1}$$

Un individu né à la date t décide de sa consommation présente c_t et de sa consommation d_{t+1} lorsqu'il sera vieux sur la base d'une fonction d'utilité intertemporelle notée $U(c_t, d_{t+1})$. En admettant que l'o¤re de travail soit inélastique, le programme de cet agent s'écrit :

$$\text{Max } U(c_t, d_{t+1})$$

Sous les contraintes :

$$P_t c_t + P_t s_t = -_{1t} \tag{2}$$

$$P_{t+1} d_{t+1} = (1 + i_{t+1}) P_t s_t + -_{2t} \tag{3}$$

La variable P_t désigne le prix du bien de consommation à la date t exprimé dans un numéraire quelconque et les paramètres $-_{1t}$ et $-_{2t}$ représentent respectivement les revenus nominaux de l'agent lorsqu'il est jeune et lorsqu'il est vieux. Le taux d'intérêt nominal entre les dates t et $t + 1$ est égal à i_{t+1}, par conséquent une unité de numéraire épargné à la date t procure un revenu de $(1 + i_{t+1})$ unités de ce numéraire à la date $t + 1$. Enfin, la variable s_t désigne le volume de l'épargne à la date t. Si ce dernier est positif, il correspond à une demande de titres, l'agent est prêteur. Dans le cas contraire, il s'agit d'une offre de titres et l'agent est emprunteur. La contrainte (2) exprime qu'un jeune partage son revenu entre consommation et épargne et la contrainte (3) signifie que la valeur de sa consommation lorsqu'il sera vieux est égale à la somme de ce que lui rapporte le placement de son épargne et de son revenu à cette période. Il faut noter qu'en réalité un agent jeune ne connaît pas nécessairement le prix du bien de consommation à la date $t + 1$ et le montant exact de son revenu lorsqu'il sera vieux. En d'autres termes, dans la contrainte (3) les variables P_{t+1} et Ω_{2t} sont des anticipations. Dans tout ce qui suit nous supposerons que les agents sont capables de former des anticipations parfaites, c'est-à-dire que la valeur anticipée d'une variable à la date t est égale à sa valeur réalisée à la date $t + 1$. Cette hypothèse permet d'écarter d'emblée les inefficacités qui proviendraient d'erreurs dans la formation des anticipations. Définissons les revenus réels d'un agent par $\omega_{1t} \equiv \Omega_{1t}/P_t$ et $\omega_{2t} = \Omega_{2t}/P_{t+1}$, les contraintes bugdétaires (2) et (3) s'écrivent respectivement :

$$c_t + s_t = \omega_{1t} \tag{4}$$

$$d_{t+1} = (1 + r_{t+1})s_t + \omega_{2t} \tag{5}$$

Dans cette dernière relation la variable r_{t+1} représente le taux d'intérêt réel entre les dates t et $t + 1$, il est défini par :

$$1 + r_{t+1} \equiv (1 + i_{t+1})\frac{P_t}{P_{t+1}} \tag{6}$$

En éliminant le volume s_t de l'épargne entre les contraintes (4) et (5), on obtient l'expression de la contrainte budgétaire intertemporelle d'un agent né à la date t. Il vient ainsi :

$$c_t + \frac{d_{t+1}}{1 + r_{t+1}} = \omega_t \equiv \omega_{1t} + \frac{\omega_{2t}}{1 + r_{t+1}} \tag{7}$$

Cette relation signifie simplement que, sur l'ensemble de la vie d'un agent, la valeur actualisée de sa consommation égalise la valeur actualisée ω_t de sa richesse totale. En définitive, le programme d'un agent né à la date t se résume à la maximisation de la fonction d'utilité $U(c_t, d_{t+1})$ sous la contrainte budgétaire intertemporelle (7). La théorie des choix du consommateur — voir, par exemple, Varian (1992, chapitre 7), Picard (1992, chapitre 2) et, dans ce livre, le Chapitre ??? consacré à la consommation ¡ nous enseigne que les solutions optimales respecteront cette contrainte budgétaire et satisferont l'égalité du taux marginal de substitution entre les consommations c_t et d_{t+1} avec le prix relatif de ces dernières, à savoir $(1 + r_{t+1})$. On aura ainsi :

$$\frac{U'_c(c_t, d_{t+1})}{U'_d(c_t, d_{t+1})} = 1 + r_{t+1} \tag{8}$$

L'examen des relations (7) et (8) montrent que les solutions ne dépendent que du taux d'intérêt réel et de la richesse totale actualisée. En particulier, la consommation c_t peut s'écrire $c_t = c(\omega_t, r_{t+1})$ et la contrainte (4) permet de dé…nir une fonction d'épargne individuelle par la relation :

$$s_t \equiv \omega_{1t} - c(\omega_t, r_{t+1}) \tag{9}$$

Lorsque la fonction d'utilité est séparable et concave, on peut montrer d'une part que les consommations dans les deux périodes de la vie d'un agent sont des biens normaux et, d'autre part, que la fonction d'épargne est croissante avec la richesse réelle totale d'un agent (voir Azariadis, 1993, chapitre 13). En revanche, les variations du taux d'intérêt ont des e¤ets ambigus sur cette fonction. Pour simpli…er supposons que $\omega_{2t} = 0$, la contrainte budgétaire intertemporelle (7) montre qu'une hausse de r_{t+1} est équivalente à une baisse du prix de la consommation de deuxième période. L'e¤et de substitution a alors tendance à diminuer la consommation de première période et, par conséquent, à accroître l'épargne. Mais cette baisse du prix de la consommation de deuxième période entraîne aussi un e¤et de revenu positif qui augmente les consommations de biens à chaque période, ce qui implique, en particulier, une baisse de l'épargne (pour plus de précisions au sujet des e¤ets de revenu et substitution, voir le Chapitre ??? de ce livre sur la consommation). Finalement, il apparaît que l'épargne est une fonction croissante du taux d'intérêt si et seulement si l'e¤et de substitution domine l'e¤et de revenu ou, de façon équivalente, si et seulement si l'élasticité de substitution entre c_t et d_{t+1} est supérieure à 1 (pour plus de précisions sur les propriétés de la fonction d'épargne voir, par exemple, Blanchard et Fischer, 1989, pp. 137-138, Artus, 1995, p. 10, Azariadis, 1993, chapitre 13, et le Chapitre ??? de ce livre sur la consommation). A…n d'éviter ces ambiguïtés de signes et pour obtenir des résultats explicites, nous utiliserons souvent une fonction d'utilité séparable et logarithmique de la forme :

$$U(c_t, d_{t+1}) = \log c_t + \frac{1}{1+\rho} \log d_{t+1} \ , \quad \rho \geq 0 \tag{10}$$

Dans ce cas, l'effet de substitution a exactement la même ampleur que l'effet de revenu (l'élasticité de substitution entre c_t et d_{t+1} est égale à 1) et l'épargne ne dépend pas de la valeur du taux d'intérêt. En supposant encore que $\omega_{2t} = 0$, la fonction d'épargne s'écrit :

$$s_t = \frac{\omega_t}{2+\rho} \tag{11}$$

Avec cette spécification particulière de l'utilité des agents, le volume de l'épargne est une fraction constante de la richesse totale d'un individu. Le taux d'épargne est égal à $1/(2+\rho)$.

2.2 Les entreprises

Le secteur productif de l'économie se compose d'un grand nombre de firmes identiques en situation de concurrence parfaite sur tous les marchés. Afin d'alléger les notations, nous représenterons la technologie de ce secteur par une fonction de production unique $Y_t = F(K_t, L_t)$ où Y_t, K_t et L_t désignent respectivement la quantité de bien produite à la date t, le stock de capital et la main-d'œuvre nécessaires à cette production. Dans cette formulation, nous ne prenons pas en compte l'influence du progrès technique. Cette simplification ne modifie pas le sens des résultats auxquels nous parviendrons. Si l'on voulait retenir explicitement les effets de ce facteur il suffirait d'ajouter au taux de croissance n de la population le taux de croissance du progrès technique (voir le Chapitre ??? de ce livre consacré à l'étude de la croissance). Nous supposerons que cette fonction de production est croissante en ses deux arguments, qu'elle est concave et qu'elle présente des rendements d'échelle constants. Cette dernière hypothèse permet d'écrire :

$$F(K_t, L_t) = L_t f(k_t) \quad \text{avec} \quad k_t = \frac{K_t}{L_t} \quad \text{et} \quad f(k_t) = F(k_t, 1)$$

On vérifie aisément que $f' > 0$ et $f'' < 0$ lorsque la fonction F est concave. En dérivant la relation ci-dessus respectivement par rapport à L_t et K_t, on obtient les expressions des productivités marginales des facteurs en fonction du ratio k_t représentant le capital par tête. Il vient ainsi :

$$F'_K(K_t, L_t) = f'(k_t) \quad \text{et} \quad F'_L(K_t, L_t) = f(k_t) - k_t f'(k_t) \tag{12}$$

Pour ce qui concerne le processus d'investissement[1], nous admettrons que le capital ne devient opérationnel qu'au bout d'une période. Par conséquent, la génération née à la date $(t-1)$ achète à cette date le capital K_t qui sera utilisé à la date t. Comme les agents n'ont aucune ressource à la naissance — nous excluons pour l'instant la possibilité de legs —, ils doivent émettre à la date $(t-1)$ des titres pour une valeur de $P_{t-1}K_t$, ce qui à la période suivante les obligera à un remboursement d'un montant égal à $(1+i_t)P_{t-1}K_t$. En admettant que le capital se déprecie au taux δ et qu'à la fin de chaque période t le capital résiduel — soit $(1-\delta)K_t$ — est revendu, le profit nominal escompté pour la période t s'écrit :

$$\Pi_t = P_t\left[Y_t + (1-\delta)K_t\right] - W_t L_t - (1+i_t)P_{t-1}K_t$$

Dans cette expression, W_t désigne le salaire nominal à la période t. En réalité, puisqu'il s'agit d'un profit escompté, les variables P_t et W_t sont des anticipations. Nous avons déjà indiqué, à propos du programme des consommateurs, que nous supposions que les agents étaient capables de former des anticipations parfaites. En divisant les deux membres de cette équation par le prix P_t et en tenant compte de la définition (6) du taux d'intérêt réel, il vient :

$$\pi_t = \frac{\Pi_t}{P_t} = F(K_t, L_t) - w_t L_t - (r_t + \delta)K_t$$

La variable $w_t = W_t/P_t$ représente le salaire réel. Les conditions du premier ordre pour la maximisation du profit s'obtiennent en annulant les dérivées partielles de ce dernier par rapport aux deux facteurs de production, compte tenu de la relation (12) définissant les productivités marginales, on aboutit à :

$$f'(k_t) = r_t + \delta \tag{13}$$

$$f(k_t) - k_t f'(k_t) = w_t \tag{14}$$

[1] La décision d'investissement est ici très rudimentaire, pour une analyse approfondie voir le Chapitre ??? de ce livre.

Ces relations signifient simplement que sur des marchés parfaitement concurrentiels, la productivité marginale du capital égalise le coût d'usage de ce facteur et que la productivité marginale du travail est égale au salaire réel. Pour la suite, il sera utile de considérer que ces deux dernières équations définissent le taux d'intérêt et le salaire en fonction du ratio k_t. Nous noterons ces liaisons $r_t = r(k_t)$ et $w_t = w(k_t)$. Pour aboutir à des résultats explicites nous admettrons parfois que la fonction de production prend la forme Cobb-Douglas suivante :

$$F(K_t, L_t) = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \quad , \quad \alpha \in]0, 1[\tag{15}$$

Dans ce cas, il vient après quelques calculs simples :

$$r(k_t) = \alpha k_t^{\alpha - 1} - \delta \qquad \text{et} \qquad w(k_t) = (1 - \alpha) k_t^{\alpha} \tag{16}$$

2.3 L'équilibre concurrentiel et le sentier de croissance équilibrée

Comme il y a trois biens et donc trois marchés dans cette économie, il suffit, d'après la loi de Walras, de considérer l'équilibre de l'offre et de la demande sur deux marchés. Nous privilégierons le marché du travail et celui des titres. En admettant que chaque jeune offre de manière inélastique une unité de travail, l'équilibre de concurrence parfaite sur ce marché se résume à l'égalité du volume de la population active N_t avec le volume de la main-d'œuvre L_t demandé par les entreprises. Lorsque l'équilibre sur le marché du travail est réalisé, on a alors $L_t = N_t$, et la valeur des titres demandés par les ménages est égale à $P_t N_t s_t$. L'équilibre sur le marché des titres signifie que la valeur des titres demandés à la date t, soit $P_t N_t s_t$, est égale à la valeur des titres émis par les entreprises, soit $P_t K_{t+1}$. En d'autres termes, à chaque date t, l'épargne globale $N_t s_t$ correspond à l'investissement K_{t+1}.

En l'absence de dotation initiale, la richesse ω_{1t} se confond avec le salaire réel w_t. De plus, on sait qu'en présence de rendements d'échelle constants, les profits sont nuls. Par conséquent les revenus ω_{2t} des vieux sont nuls et la richesse réelle totale ω_t d'un agent né à la date t se confond aussi avec le salaire réelle w_t. La fonction d'épargne (9) peut donc s'écrire $s_t = s(w_t, r_{t+1})$ et l'égalité de l'investissement et de l'épargne prend ainsi la forme :

$$K_{t+1} = N_t s(w_t, r_{t+1})$$

En se rappelant que les conditions de maximisation du profit définissent le salaire et le taux de l'intérêt en fonction du ratio k_t — voir (13) et (14) —, la division des deux membres de cette dernière relation par N_t entraîne :

$$(1+n)k_{t+1} = s\left[w(k_t), r(k_{t+1})\right] \tag{17}$$

On obtient ainsi une équation de récurrence du premier ordre liant k_{t+1} et k_t. Les propriétés de cette liaison (en particulier la monotonie et la concavité) dépendent en particulier de la manière dont l'épargne réagit aux variations du taux d'intérêt. Or, nous avons signalé auparavant que cette réaction était d'un signe ambigu. Il n'est donc pas possible d'énoncer a priori des propriétés générales sur la convergence et la stabilité du processus de croissance dans un modèle à générations imbriquées (pour plus de précisions, voir Blanchard et Fischer, 1989, pp. 95-97, et le Chapitre ??? de ce livre consacré à l'étude de la dynamique non linéaire). On retrouve cependant le cadre habituel de la croissance néo-classique exposé au Chapitre ??? de ce livre en supposant que la fonction d'utilité des agents a la forme logarithmique (10) et que la fonction de production est du type Cobb-Douglas (15). A l'aide des relations (11) et (16), l'équation de récurrence précédente s'écrit simplement :

$$k_{t+1} = \phi(k_t) = \frac{1-\alpha}{(2+\rho)(1+n)} k_t^{\alpha} \tag{18}$$

Dans ce cas l'économie converge vers un équilibre stationnaire stable unique k^* défini par :

$$k^* = \left[\frac{1-\alpha}{(2+\rho)(1+n)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{19}$$

L'équilibre stationnaire correspond à un sentier de croissance équilibrée où le stock de capital croît au taux n tandis que le salaire et le taux d'intérêt demeurent constants. Les propriétés du processus de croissance décrit par les relations (18) et (19) sont identiques à celles issues des modèles de Solow et de Ramsey (voir les Chapitres ??? et ??? de ce livre). Le modèle à générations imbriquées présente cependant l'avantage de ne pas faire reposer ces propriétés sur l'hypothèse irréaliste d'un agent ayant un horizon de vie infinie (modèle de Ramsey) ou sur un taux d'épargne exogène (modèle de Solow).

3 Croissance optimale et concurrence parfaite

L'équilibre de concurrence parfaite décrit à la section précédente est-il optimal ? Pour répondre à cette question, on pourrait évoquer le “premier théorème de l'économie du bien-être” selon lequel l'équilibre général de concurrence parfaite est un optimum de Pareto. Mais il faut se rappeler que ce théorème n'est pas toujours vérifié, même avec des hypothèses standard sur les préférences des agents et la technologie, lorsque l'économie comprend une infinité de biens. Or, le modèle à générations imbriquées entre dans cette catégorie puisqu'il comporte une infinité de périodes et qu'un même bien physique donne naissance à des biens économiques différents selon les dates auxquelles il est produit ou consommé. Il s'avère donc nécessaire d'étudier la question de l'efficacité de l'équilibre concurrentiel dans les modèles à générations imbriquées, l'équivalence équilibre/optimum n'étant plus garantie.

3.1 Planification de l'allocation des ressources

Nous allons nous resteindre à l'étude d'un sous-ensemble des optima de Pareto, en faisant l'hypothèse que le “poids” — le sens de ce terme va être immédiatement précisé — d'une génération future ne peut excéder celui d'une génération présente. Dans ce cas, le critère d'optimalité qui guiderait un planificateur omniscient dans l'allocation des ressources en tenant compte du bien-être de l'ensemble des générations successives, pourrait prendre la forme suivante :

$$\mathrm{U} = \sum_{t=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+R} \right)^t U(c_t, d_{t+1}) \tag{20}$$

Lorsque le paramètre exogène R est strictement positif, le planificateur attribue à chaque génération un poids d'autant plus faible qu'elle est éloignée de la génération présente (cette dernière correspond par normalisation à la date $t = 0$). Si l'on estime que toutes les générations doivent être traitées de manière équivalente, il suffit de poser $R = 0$ dans le critère (20). En supposant d_0 donné, le planificateur va choisir la suite des consommations c_t et d_{t+1} pour tout $t \geq 0$ qui maximise U. Pour cela, il doit tenir compte de l'égalité entre les ressources disponibles et leurs emplois. Or, à la date t, les ressources disponibles se composent de la production de plein-emploi de la main-d'œuvre $F(K_t, N_t)$ et de la partie non dépréciée du capital $(1 -$

$\delta)K_t$, tandis que les emplois sont l'investissement K_{t+1}, la consommation des jeunes $N_t c_t$ et la consommation des vieux $N_{t-1}d_t$. Ainsi, partant d'une situation initiale où K_0 et N_0 sont des données, l'égalité entre les emplois et les ressources s'écrit à chaque date $t \geq 0$:

$$F(K_t, N_t) + (1 - \delta)K_t = K_{t+1} + N_t c_t + N_{t-1} d_t$$

En divisant les deux membres de cette relation par N_t et en utilisant la propriété de constance des rendements d'échelle de la fonction de production, cette égalité prend alors la forme suivante (avec $k_0 \equiv K_0/N_0$ et d_0 donnés) :

$$f(k_t) + (1 - \delta)k_t = (1 + n)k_{t+1} + c_t + \frac{d_t}{1 + n} \tag{21}$$

On peut extraire de cette relation la valeur de c_t en fonction de k_t, k_{t+1} et d_t, et la reporter dans le critère U. Le programme du planificateur devient alors :

$$\max_{\{k_t, d_t\}_{t \geq 1}} \sum_{t=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+R}\right)^t U\left[f(k_t) + (1 - \delta)k_t - (1 + n)k_{t+1} - \frac{d_t}{1+n}, d_{t+1}\right]$$

Les conditions du premier ordre s'obtiennent en annulant les dérivées partielles de cette expression respectivement par rapport à k_t et à d_t, il vient ainsi pour tout $t \geq 1$:

$$\frac{1 - \delta + f'(k_t)}{(1+n)(1+R)} = \frac{U'_c(c_{t-1}, d_t)}{U'_c(c_t, d_{t+1})} \tag{22}$$

$$1 + n = \frac{1}{1+R}\frac{U'_c(c_t, d_{t+1})}{U'_d(c_{t-1}, d_t)} \equiv \frac{\partial U}{\partial c_t}\Big/\frac{\partial U}{\partial d_t} \tag{23}$$

Le côté droit de la relation (23) représente le taux marginal de substitution entre la consommation d'un jeune et celle d'un vieux vivant à la même date t. Il apparaît que le planificateur fera en sorte que cette variable soit égale au taux marginal de transformation $(1 + n)$. Cette condition n'a aucune raison d'être vérifiée dans l'économie de marché parfaitement concurrentiels étudiée à la section 2 précédente, car l'horizon de chaque agent étant limité à ses deux périodes de vie, il ne prend jamais en compte les possibilités de substituer les consommations entre les générations. En revanche, il faut noter qu'en divisant membre à membre les relations (22) et (23), on obtient :

$$1 - \delta + f'(k_t) = \frac{U'_c(c_{t-1}, d_t)}{U'_d(c_{t-1}, d_t)} \tag{24}$$

Or, les équations (8) et (13) montrent que cette dernière égalité sera vérifiée à l'équilibre de concurrence parfaite. Ce résultat provient du fait que les choix du planificateur pour un individu donné sont exactement les mêmes que ceux qu'aurait effectués cet individu dans un univers décentralisé. En définitive, les différences entre l'état optimal pour le planificateur et l'équilibre décentralisé de concurrence parfaite proviennent de l'allocation des ressources entre les générations et non de l'allocation des ressources au sein d'une même génération.

3.2 La règle d'or

Supposons que l'allocation des ressources choisie par le planificateur converge vers un état stationnaire où, par conséquent, $c_t = c_{t-1}$ et $d_t = d_{t+1}$, la condition (22) donne immédiatement la valeur stationnaire $\hat{k}$ du stock de capital par tête. Elle est définie par l'égalité :

$$f'(\hat{k}) = (1 + n)(1 + R) - (1 - \delta) \tag{25}$$

Lorsque le planificateur considère que toutes les générations ont le même poids ($R = 0$), cette dernière équation devient :

$$f'(\hat{k}_0) = n + \delta \tag{26}$$

Cette relation selon laquelle, à l'optimum, le taux de rendement net du capital $f'(\hat{k}_0) - \delta$ doit être égal au taux de croissance n de l'économie, porte le nom de règle d'or. La relation (25) qui admet la possibilité d'une certaine inégalité entre les générations ($R \neq 0$) s'appelle la règle d'or modifiée (voir le Chapitre ??? de ce livre pour une étude générale de la croissance optimale).

Du point de vue de l'équité entre les générations, il est naturel de privilégier un sentier d'accumulation du capital respectant la règle d'or. Or, pour que cette règle soit satisfaite à l'équilibre stationnaire de concurrence parfaite il faudrait, selon la relation (13), que le taux d'intérêt r^* sur un sentier de croissance équilibrée soit égal au taux de croissance n de l'économie. Il est facile de vérifier à l'aide d'un exemple que cette situation n'a que très peu de chances de se réaliser. Pour cela supposons que l'utilité des agents est de la forme logarithmique (10) et que la fonction de production est du type Cobb-Douglas (15), dans ce cas la valeur stationnaire du taux d'intérêt s'obtient à l'aide des relations (16) et (19). Il vient ainsi :

$$r^{*} = \frac{\alpha(2+\rho)(1+n)}{1-\alpha} - \delta$$

Pour avoir $r^{*} = n$, il faudrait alors que l'égalité suivante soit véri…ée :

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{n+\delta}{(1+n)(2+\rho)} \tag{27}$$

Si l'on admet avec Barro et Sala-i-Martin (1995, pp. 133-134) que chaque période de vie d'un individu dure 30 ans et, qu'en termes annuels, le taux de croissance de la population, le taux d'escompte psychologique et le taux de dépréciation du capital sont respectivement égaux à 1%, 2% et 5%, on doit alors retenir les valeurs de $n = 0.35$, $\rho = 0.82$ et $\delta = 0.78$ pour les paramètres du modèle. Dans ces conditions, le membre de droite de la relation (27) est égal à 0.297 et il faudrait alors que α prenne une valeur proche de 0.23 pour que cette relation soit véri…ée. Or, les études empiriques montre que le coe¢cient α qui mesure la contribution du capital à la croissance est au moins égal à 0.3 (ce chi¤re devant être fortement réévalué si l'on inclus dans la notion de capital celle de capital humain, voir le Chapitre ??? de ce livre). Cet exercice de calibration ne doit pas être pris au pied de la lettre ¡ les chi¤res utilisés pourraient être sensiblement di¤érents ¡ , il illustre simplement un résultat théorique important à savoir la non-équivalence entre l'équilibre concurrentiel et l'optimum social dans un modèle simple avec générations imbriquées.

3.3 Règle d'or et e¢cacité dynamique

Nous avons vu que la règle d'or dé…nit une allocation stationnaire des ressources que choisirait un plani…cateur appliquant un principe d'équité entre les générations ($R = 0$). Cependant, il faut bien comprendre que cette règle ne caractérise pas l'ensemble des optima de Pareto stationnaires puisque, par exemple, un sentier de croissance équilibrée où règnerait la règle d'or modi…ée (25) est aussi un optimum de Pareto. Dans ce qui suit, nous allons néanmoins montrer qu'il est possible de fournir un critère simple s'appliquant à tous les optima de Pareto. Pour cela dé…nissons la consommation agrégée z_t comme étant la somme $c_t + d_t/(1+n)$ et considérons l'égalité (21) des emplois et des ressources pour des valeurs stationnaires de z_t et k_t. On a ainsi :

$$f(k) - (n+\delta)k = z$$

Comme f'' est négatif, cette relation implique en particulier :

$$\frac{dz}{dk} = f'(k) - (n+\delta) < 0 \iff k > \hat{k}_0$$

Ainsi, dans un état stationnaire où le stock de capital dépasse celui de la règle d'or, une baisse du niveau de ce stock accroît la consommation agrégée et, par conséquent, pourrait permettre d'augmenter le bien-être de toutes les générations. Ce résultat provient de la décroissance de la productivité marginale du capital. Lorsque le stock de capital est élevé, il est préférable de transférer une partie des ressources consacrées à l'investissement vers la consommation, car le capital additionnel n'est plus assez productif. Par définition, une économie où le niveau d'équilibre stationnaire du capital par tête est égal à k est dite dynamiquement inefficace si :

$$f'(k) < n + \delta \tag{28}$$

Comme f'' est négatif, on a $k > \hat{k}_0$, il y a alors sur-accumulation du capital dans la mesure où cette économie affiche un stock de capital par tête plus important que celui qui est requis par la règle d'or. L'hypothèse inverse où $k < \hat{k}_0$, caractérise une situation de sous-accumulation du capital. Lorsqu'il y a sur-accumulation du capital, l'équilibre auquel est parvenu l'économie n'est pas un optimum de Pareto, c'est-à-dire qu'il est possible d'augmenter la satisfaction de toutes les générations. Pour établir ce résultat, nous allons montrer que, partant d'un équilibre stationnaire, on peut accroître la consommation des jeunes et des vieux de toutes les générations en baissant simplement l'épargne des jeunes. Comme à chaque date t l'épargne individuelle s_t est égale à $(1+n)k_{t+1}$ — voir (17) —, la condition (21) d'équilibre sur le marché des biens s'écrit encore :

$$c_t + \frac{d_t}{1+n} = f\left(\frac{s_{t-1}}{1+n}\right) + \frac{1-\delta}{1+n}s_{t-1} - s_t$$

Plaçons nous sur un sentier de croissance équilibrée où k_t est égal à k, et à partir d'une date τ quelconque faisons varier l'épargne individuelle d'une petite quantité Δs. Comme $s_{\tau-1}$ ne varie pas, la relation précédente implique successivement :

$$\Delta c_\tau + \frac{\Delta d_\tau}{1+n} = -\Delta s$$

$$\Delta c_t + \frac{\Delta d_t}{1+n} = \frac{\Delta s}{1+n}\left[f'(k) - (n+\delta)\right] \qquad \forall t > \tau$$

Lorsqu'il y a sur-accumulation du capital, k est supérieur à $\hat{k}_0$, et $f'' < 0$ implique $f'(k) < n + \delta$. Il apparaît alors qu'une baisse de l'épargne ($\Delta s < 0$) permet d'accroître les consommations des jeunes et des vieux de toutes les générations à partir de la date t. Ce résultat est conforme à l'intuition : un excédent de capital correspondant toujours à un excédent d'épargne, il suffit de baisser cette dernière pour baisser le stock de capital. En revanche, si l'économie se trouve dans une situation de sous-accumulation du capital, alors $f'(k) > n + \delta$, et l'on constate qu'une hausse de l'épargne ($\Delta s > 0$) permettrait d'augmenter la consommation de toutes les générations... sauf de la première. Une situation de sous-accumulation nécessite en effet un accroissement du stock de capital. Pour y parvenir, il est nécessaire de réduire la consommation de la période initiale. Un équilibre de sous-accumulation est donc efficace au sens de Pareto puisqu'il n'est pas possible de modifier l'allocation des ressources existante sans diminuer le bien-être d'au moins une génération.

Lorsque les firmes maximisent leur profit, la productivité marginale du capital $f'(k)$ égalise le coût d'usage $(r + \delta)$ du capital (voir (13)). Par conséquent, un équilibre de sur-accumulation se caractérise aussi par l'inégalité $r < n$. En d'autres termes, une économie dynamiquement inefficace devrait afficher un taux d'intérêt réel plus faible que le taux de croissance. Cette configuration se rencontre souvent dans les périodes de forte inflation, mais, depuis au moins quinze ans, elle a disparu dans la plupart des pays industrialisés. A titre d'illustration, le Tableau 1 donne, pour la France, la valeur du taux d'intérêt réel et du taux de croissance (en % par an) entre 1982 et 1995.

Tableau 1 : Taux d'intérêt réel et croissance en France

	1982	1985	1990	1995
Taux d'intérêt réel	4,5	6,1	7,6	5,6
Taux de croissance	2,5	1,9	2,5	2,7

Source : Artus (1996, p. 44)

Si la plupart des pays industrialisés a¤rontent plutôt des situations de sous-accumulation ($r > n$), c'est en référence à ce diagnostic qu'il nous faudra apprécier les e¤ets des politiques économiques que nous étudierons à la section 5. Mais auparavant nous examinons si d'autres hypothèses sur les comportements des agents sont susceptibles de modi…er les liens entre l'e¢cacité et le fonctionnement parfaitement concurrentiel des marchés.

4 E¢cacité et altruisme

Nous venons de voir que l'équilibre de concurrence parfaite ne coïncide pas, en général, avec un état optimal de l'allocation des ressources. A priori, ce résultat semble provenir d'une certaine myopie des agents qui ne prennent jamais en compte le bien-être des générations futures dans leurs décisions d'épargne et de consommation. Pour tester la validité de ces conclusions, nous allons maintenant examiner ce que deviennent les propriétés d'une économie parfaitement concurrentielle lorsque les agents adoptent des comportements altruistes, c'est-à-dire lorsqu'ils se préoccupent du sort de leurs descendants (Barro, 1974).

4.1 Les choix d'un agent altruiste

L'utilité d'un invidu altruiste né à la date t peut s'écrire de la façon suivante :

$$V_t = U(c_t, d_{t+1}) + \frac{1}{1+R} V_{t+1} \tag{29}$$

Selon cette expression, l'utilité V_t de la génération née à la date t dépend de ses propres consommations c_t et d_{t+1}, mais aussi de l'utilité V_{t+1} de la génération suivante. Il faut noter que les agents privés sont supposés avoir le même taux d'escompte $1/(1+R)$ que le plani…cateur. Cette hypothèse s'avère nécessaire si l'on veut comparer valablement les propriétés d'un équilibre d'une économie de marchés avec celles d'une allocation centralisée des ressources. Sans perte de généralité, nous allons considérer désormais l'utilité d'un agent né à la date $t = 0$. En itérant la relation (29) à partir de $t = 0$, il vient :

$$V_0 = \sum_{t=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+R} \right)^t U(c_t, d_{t+1}) \tag{30}$$

On constate que le lien existant entre deux générations successives fait en sorte que chaque agent est en fait préoccupé par l'utilité de toutes les générations qui le suivent. C'est pourquoi le critère de choix (30) se confond avec l'objectif (20) du planificateur. Nous admettrons que chaque agent a la possibilité de léguer une partie de sa richesse à ses descendants. Plaçons-nous d'emblée dans le cas où, hormis les legs, le revenu réel de la première période se compose du salaire réel w_t et où le revenu de la seconde période consiste uniquement dans les intérêts et le principal que procure l'épargne réalisée en première période (ce qui, à l'équilibre, sera effectivement vérifié puisque les profits des entreprises sont nuls). Si l'on désigne par ℓ_t ce que chaque individu né à la date t reçoit de la génération qui l'a précédé, les contraintes budgétaires associées aux deux périodes de sa vie prennent la forme suivante :

$$c_t + s_t = w_t + \ell_t$$

$$d_{t+1} + (1+n)\ell_{t+1} = (1 + r_{t+1})s_t$$

L'apparition du terme $(1+n)\ell_{t+1}$ dans la contrainte relative à la deuxième période de vie, signifie qu'un agent représentatif de la génération t aura $(1+n)$ enfants et qu'il cèdera à chacun un leg d'un montant égal à ℓ_{t+1}. En éliminant l'épargne s_t entre ces deux dernières équations, on obtient la contrainte budgétaire intertemporelle d'un agent né à la date t. Elle s'écrit :

$$c_t + \frac{d_{t+1}}{1 + r_{t+1}} = w_t + \ell_t - \frac{1+n}{1+r_{t+1}} \ell_{t+1} \quad , \quad \forall t \geq 0 \tag{31}$$

Un agent né à la date t a hérité de ℓ_t et doit décider des volumes de ses consommations c_t et d_{t+1} ainsi que du montant du leg ℓ_{t+1} qu'il offrira à chacun de ses enfants. En écartant la possibilité que les jeunes puissent transférer une partie de leur richesse à leurs parents (ce qui suppose que les parents ne peuvent contraindre les enfants de rembourser leurs dettes), tous les legs doivent être positifs ou nuls, ce qui impose la contrainte supplémentaire suivante :

$$\ell_{t+1} \geq 0 \quad , \quad \forall t \geq 0, \quad \ell_0 \text{ donné} \tag{32}$$

En définitive, le programme d'un jeune né en $t = 0$ se résume à la maximisation de la fonction V_0 décrite par la relation (30) sous les contraintes (31) et (32). Pour résoudre ce problème, on peut extraire la valeur de c_t de la contrainte budgétaire (31), puis maximiser la fonction V_0 par rapport à d_{t+1} et ℓ_{t+1} pour tout $t \geq 0$. Si μ_t désigne le multiplicateur associé à la contrainte (32), le Lagrangien de ce problème s'écrit :

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+R}\right)^t U\left(w_t + \ell_t - \frac{1+n}{1+r_{t+1}}\ell_{t+1} - \frac{d_{t+1}}{1+r_{t+1}}, d_{t+1}\right) + \sum_{t=0}^{+\infty} \mu_t \ell_{t+1}$$

Les conditions du premier ordre s'obtiennent en annulant les dérivées partielles de ce Lagrangien respectivement par rapport à d_{t+1} et ℓ_{t+1}. Il vient ainsi :

$$\frac{U_c(c_t, d_{t+1})}{U_d(c_t, d_{t+1})} = 1 + r_{t+1} \quad , \quad \forall t \geq 0 \tag{33}$$

$$\frac{1+n}{1+r_{t+1}} U_c(c_t, d_{t+1}) - \frac{1}{1+R} U_c(c_{t+1}, d_{t+2}) = \mu_t \quad , \quad \forall t \geq 0 \tag{34}$$

A ces équations, il faut ajouter la relation d'exclusion :

$$\mu_t \ell_{t+1} = 0 \quad \text{avec} \quad \mu_t \geq 0, \quad \forall t \geq 0 \tag{35}$$

L'égalité (33) est la même − voir (8) − que celle obtenue dans le modèle de la section 2 sans altruisme. Elle exprime une condition d'optimalité de la répartition des consommations au cours de la vie d'un individu. Mais le volume global des consommations dépend de sa richesse actualisée qui dépend elle-même de l'ampleur des legs. C'est l'équation (34) qui permet de caractériser cette dernière. Pour cela, il est utile de remarquer que les propriétés des multiplicateurs décrites par la relation d'exclusion (35) entraînent :

$$\frac{(1+n)(1+R)}{1+r_{t+1}} = \frac{U_c(c_{t+1}, d_{t+2})}{U_c(c_t, d_{t+1})} \quad \text{si} \quad \ell_{t+1} > 0 \tag{36}$$

$$\frac{(1+n)(1+R)}{1+r_{t+1}} \geq \frac{U_c(c_{t+1}, d_{t+2})}{U_c(c_t, d_{t+1})} \quad \text{si} \quad \ell_{t+1} = 0 \tag{37}$$

Les relations (33), (36) et (37) fournissent une caractérisation complète du comportement d'un individu altruiste. Il faut y ajouter la description du comportement des firmes pour déterminer les propriétés de l'équilibre général.

4.2 L'équilibre concurrentiel

Pour le secteur productif, nous adopterons les mêmes hypothèses que celles de la section 2. Dans ce cas, l'équilibre de ce secteur est encore décrit par les relations (13) et (14). En particulier, le taux d'intérêt réel et le capital par tête sont liés par une fonction $r_t = r(k_t)$ définie par :

$$r(k_t) = f'(k_t) - \delta \tag{38}$$

Afin de comparer sans trop de difficultés l'allocation des ressources d'une économie de marchés où les agents sont altruistes avec celle d'une planification centralisée, plaçons-nous à l'équilibre stationnaire de la première. Désignons respectivement par $\bar{r}$ et $\bar{\ell}$ les valeurs du taux d'intérêt réel et du leg reçu par chaque individu. Comme dans cette situation on a aussi $c_t = c_{t+1}$ et $d_{t+1} = d_{t+2}$ pour tout $t \geq 0$, les relations (36) et (37) impliquent alors :

$$(1 + \bar{r}) = (1 + n)(1 + R) \quad \text{si} \quad \bar{\ell} > 0 \tag{39}$$

$$(1 + \bar{r}) \leq (1 + n)(1 + R) \quad \text{si} \quad \bar{\ell} = 0 \tag{40}$$

En confrontant les égalités (38) et (39), il apparaît que le capital par tête $\bar{k}$ dans une économie de concurrence parfaite où les legs sont strictement positifs est défini par :

$$f'(\bar{k}) = (1 + n)(1 + R) - (1 - \delta)$$

La comparaison de cette équation avec la relation (25) définissant l'intensité capitalistique $\hat{k}$ choisit par le planificateur, montre que l'on a $\bar{k} = \hat{k}$. Ainsi, une économie de concurrence parfaite où les agents sont parfaitement altruistes aboutit à une allocation optimale des ressources lorsque chaque agent décide effectivement de léguer une partie de sa richesse à ses descendants. Pour savoir dans quelles circonstances cette éventualité se réalisera, il suffit d'examiner les conséquences de l'inégalité (40). S'il n'y a aucun leg dans l'état stationnaire ($\bar{\ell} = 0$), l'équilibre de l'économie de concurrence parfaite avec altruisme se confond avec celui d'une économie sans altruisme que nous avons décrit à la section 2. Désignons par k^* la valeur du capital dans ce dernier cas – l'équation (19) donne cette valeur pour une représentation logarithmique de l'utilité et pour une fonction de production de type Cobb-Douglas –, les relations (40) et (38) indiquent que le niveau d'équilibre du leg sera nul dans l'économie avec altruisme si k^* vérifie l'inégalité suivante :

$$f'(k^*) \leq (1+n)(1+R) - (1-\delta)$$

En d'autres termes, le niveau d'équilibre des legs est nul lorsque $k^* \geq \hat{k}$, c'est-à-dire lorsque le stock de capital dans l'économie de marché sans altruisme est supérieur à celui qu'aurait choisi le planificateur. Cette conclusion affaiblit considérablement les conséquences d'une attitude altruiste, puisqu'elle signifie que ce type de comportement ne permet pas d'atteindre un état optimal lorsque l'économie de marché avec des agents myopes a tendance à accumuler "trop" de capital. A la reflexion, ce résultat est peut être moins surprenant qu'il ne paraît. En effet, une économie ayant un stock de capital sur-dimensionné souffre d'un excès d'épargne. Un comportement altruiste ne modifiera pas ce défaut car les agents ont désormais la possibilité d'épargner afin de transmettre un héritage à leurs enfants. L'économie avec altruisme n'a donc pas tendance à faire baisser le niveau du capital par tête, les relations (39) et (40) montrent d'ailleurs que l'on a toujours $\tilde{k} \geq \hat{k}$. En revanche, l'économie avec altruisme s'avère efficace dans des situations où l'économie sans altruisme aurait abouti à un stock de capital trop faible, c'est-à-dire dans des situations caractérisées par un manque d'épargne ($k^* \leq \hat{k}$). Dans ce cas, les comportements altruistes accroissent l'épargne afin de favoriser la transmission d'un héritage positif.

Ainsi, l'hypothèse d'altruisme ne suffit pas à établir, dans tous les cas, l'optimalité de l'équilibre concurrentiel. L'inefficacité dynamique d'une économie de concurrence parfaite ne provient donc pas uniquement de la myopie des agents privés. Pour se rapprocher d'un état optimal, il faudrait de plus que les agents puissent transférer à leur guise des ressources de "l'avenir vers le passé", c'est-à-dire que les jeunes puissent effectuer des transferts en faveur de leurs parents. Dans cette situation d'altruisme bilatéral la contrainte (35) de positivité des legs – qui bloquait l'épargne à un niveau trop élevé – disparaît, et l'équilibre de concurrence parfaite devrait se rapprocher d'un état optimal. Cette intuition n'est en réalité que très partiellement vérifiée car les choix des agents sont alors soumis à des contraintes de cohérence temporelle qui restreignent l'ensemble des solutions (voir Blanchard et Fischer, 1989, pp. 107-110[?] et Bernheim et Bagwell, 1988[?]). Il apparaît qu'en gardant un semblant de réalisme au modèle, les comportements altruistes n'assurent toujours pas nécessairement une allocation optimale des ressources.

En résumé, les sections 3 et 4 ont mis l'accent sur une forme d'inefficacité de l'équilibre conccurentiel résultant d'un excès ou d'un manque dans l'accumulation du capital. Nous examinons maintenant si certaines mesures de politiques économiques ou si certaines institutions sont susceptibles de modifier ces conclusions.

5 Politiques économiques

Dans un modèle à générations imbriquées l'équilibre de concurrence parfaite n'est pas toujours un état optimal (ou dynamiquement efficace selon le critère choisi). L'usage d'un tel modèle permet ainsi d'apprécier si telle ou telle mesure rapproche l'équilibre concurrentiel de l'état optimal. La gestion de la dette publique et des systèmes de retraite sont des exemples importants de ce type d'action gouvernementale.

5.1 dépenses et dette publiques

Dans cette partie, nous allons considérer que l'Etat lève des impôts et/ou émêt des titres afin d'offrir des prestations bénéfiques à l'ensemble des agents privés. La valeur de ces dernières forme ici les dépenses publiques, encore appelées dépenses gouvernementales[2].

5.1.1 Déficit budgétaire et endettement

Nous désignerons par g_t le volume des dépenses publiques pour chaque individu né à la date t. Ainsi, le paramètre g_t peut se concevoir comme un bien public consommé par les jeunes nés à la date t. Pour financer la production de ce bien, l'Etat a la possibilité de lever des impôts et d'émettre des titres. Pour simplifier, nous supposerons que seuls les jeunes sont assujettis à l'impôt et nous désignerons par v_t la valeur réelle de ce dernier pour un jeune de la génération t. Enfin, nous noterons b_t la valeur réelle de la dette par actif occupé à la date t, le volume total de titres émis par l'Etat à cette date est donc égal à $N_t b_t$. Si i_{t+1} désigne encore le taux d'intérêt nominal entre t et

[2] Les effets de court-moyen terme des dépenses gouvernementales sont étudiés dans le Chapitre ??? de ce livre.

$t+1$, l'Etat devra rembourser la somme de $(1+i_{t+1})P_tN_tb_t$ aux agents privés à la date $t+1$. En définitive, la contrainte budgétaire du gouvernement à la date t prend, en valeur nominale, la forme suivante :

$$P_tN_tg_t + (1+i_t)P_{t-1}N_{t-1}b_{t-1} = P_tN_tv_t + P_tN_tb_t$$

Le côté droit de cette égalité représente les ressources de l'Etat – emprunts et recettes fiscales –, tandis que le côté gauche représente les emplois – dépenses gouvernementales et service de la dette. En divisant les deux membres de cette dernière relation par P_tN_t et en utilisant la définition (6) du taux d'intérêt réel r_t, on aboutit à une expression de la contrainte budgétaire de l'Etat en termes réels. Elle s'écrit :

$$g_t + \frac{1+r_t}{1+n}b_{t-1} = v_t + b_t \tag{41}$$

Nous conservons la même description du secteur productif, en particulier les relations (13) et (14) traduisant l'égalité des productivités marginales des facteurs de production avec leur coût d'usage demeurent vérifiées. On a vu qu'elles définissent le taux d'intérêt réel et le salaire réel comme des fonctions de l'intensité capitalistique, soit respectivement $r_t = r(k_t)$ et $w_t = w(k_t)$. Pour décrire le comportement des agents, nous revenons au modèle simple de la section 2 qui ne prend pas en compte l'hypothèse d'altruisme et donc la possibilité de legs entre les générations (dans une situation de sur-accumulation, ce modèle simple n'est d'ailleurs pas réellement restrictif puisque le leg optimal est nul). Par conséquent, les contraintes budgétaires d'un agent né à la date t sont encore représentées par les relations (4) et (5). A l'équilibre du secteur productif les profits sont nuls, et le revenu ω_{2t} d'un retraité (hormis ce que lui procure son épargne) est égal à zéro. Le revenu réel d'un agent au cours de sa vie active est désormais égal à son salaire w_t diminué des impôts forfaitaires v_t. La fonction d'épargne décrite par l'équation (9) devient donc ici $s_t = s(w_t - v_t, r_{t+1})$. L'équilibre du marché des titres à la date t impose que la valeur $P_tN_ts_t$ des titres demandés par les ménages soit égale à la somme des valeurs des titres émis par les entreprises privés (P_tK_{t+1}) et par l'Etat ($P_tN_tb_t$). En termes réels, cet équilibre se traduit par l'égalité :

$$N_ts_t = K_{t+1} + N_tb_t$$

En divisant cette dernière relation par N_t, on aboutit en définitive à une équation de récurrence exprimant l'évolution de l'intensité capitalistique k_t en fonction des paramètres de politique économique v_t et b_t. Il vient ainsi :

$$(1+n)k_{t+1} = s\left[w(k_t) - v_t, r(k_{t+1})\right] - b_t \tag{42}$$

Pour simplifier, nous nous limiterons au cas simple où l'Etat choisit des niveau constants b et g pour la dette et les dépenses publiques par tête. La contrainte budgétaire (41) implique alors que l'impôt forfaitaire v_t est défini par :

$$v_t = \frac{r_t - n}{1+n} b + g \tag{43}$$

Cette relation montre que le déficit budgétaire $N_t(g - v_t)$ est en réalité un excédent lorsque $r_t < n$. L'Etat pourrait donc rester perpétuellememt endetté ($b > 0$) tout en dégageant un excédent budgétaire, dès lors que les taux d'intérêt demeurent inférieurs au taux de croissance de l'économie.

5.1.2 Faut-il accroître ou diminuer les déficits publics ?

A l'aide de la contrainte budgétaire (43), l'équation (42) donnant l'évolution de l'économie s'écrit en fonction des deux paramètres (indépendants) b et g. On a ainsi :

$$(1+n)k_{t+1} = s\left[w(k_t) - \frac{r(k_t) - n}{1+n} b - g, r(k_{t+1})\right] - b \tag{44}$$

On constate que l'on retrouve l'équation (17) décrivant la dynamique de l'économie concurrentielle sans intervention de l'Etat en faisant $b = g = 0$ dans (44). Les remarques que nous avions faites à cette occasion s'appliquent ici, en particulier nous avions vu qu'il n'était pas possible d'énoncer des propriétés très générales concernant la stabilité et la convergence du processus de croissance. Afin de pouvoir cependant analyser les effets des mesures de politique économique lorsque le processus converge vers (au moins) un équilibre stationnaire, nous allons supposer de nouveau que la fonction d'utilité des agents a la forme logarithmique (10) et que la fonction de production est du type Cobb-Douglas (15). A l'aide des relations (11) et (16), on trouve après quelques calculsque l'équation de récurrence (44) peut s'écrire de la façon suivante :

$$k_{t+1} = \phi(k_t, b, g) = \frac{1}{(1+n)(2+\rho)}\left[(1-\alpha)k_t^{\alpha} - \frac{\alpha k_t^{\alpha-1} + 1 - \delta}{1+n}b - g\right]$$

Il est facile de vérifier que la fonction ϕ est concave en k_t — les dérivées partielles ϕ_k et ϕ_{kk} sont respectivement positives et négatives —, et qu'elle décroît avec b et g. Nous avons représenté sur la Figure 1 la dynamique de cette économie. Il apparaît, qu'hormis l'origine des axes, il y a deux équilibres stationnaires lorsque les valeurs de b et g ne sont pas trop grandes. L'équilibre où l'intensité capitalistique est la plus faible (le point E') est instable, tandis que l'équilibre où l'intensité capitalistique est la plus grande (le point E'') est stable. En d'autres termes, l'économie converge vers un équilibre stationnaire stable lorsque le ratio initial du capital par tête k_0 est supérieur à l'intensité capitalistique k' correspondant à l'équilibre stationnaire instable (si $k_0 < k'$, l'économie converge vers 0).

$<$ Figure 1 $>$

La Figure 1 montre qu'une hausse de la dette b diminue la valeur k'' de l'intensité capitalistique à l'équilibre stable. Par conséquent, une politique tendant à accroître le volume de la dette publique s'avère bénéfique lorsque l'économie se trouve dans une situation de sur-accumulation du capital, c'est-à-dire encore lorsque le taux d'intérêt réel r^* de l'économie de concurrence parfaite sans intervention de l'Etat est plus petit que le taux de croissance n de l'économie (dans ce cas, on a aussi $k^* > \hat{k}_0$ où k^* et $\hat{k}_0$ désignent l'intensité capitalistique respectivement associée à l'économie de concurrence parfaite sans intervention de l'Etat et à la règle d'or). Ce résultat est assez intuitif dans la mesure où une hausse de la dette publique augmente l'offre globale sur le marché des titres. Ce mouvement provoque une hausse du taux d'intérêt réel et donc une diminution du stock de capital. Il faut noter que cette conclusion reste vrai lorsque $g = 0$ car une modification de l'offre de titres a un effet sur l'équilibre du marché des instruments financiers même si cette nouvelle offre n'a aucune contrepartie en termes de consommation publique (il s'agit alors simplement d'une politique dite d'open-market). Si l'économie souffre, au contraire, d'un manque d'épargne ($k^* < \hat{k}_0$), il faut que l'Etat diminue la valeur de la dette pour que le niveau d'équilibre k'' de l'intensité capitalistique augmente.

Lorsqu'une économie est dynamiquement inefficace, la hausse de la dette publique a des effets bénéfiques aussi bien à long terme qu'à court terme.

La relation (43) décrit la contrainte budgétaire de l'Etat à long terme si l'on remplace respectivement v_t par v et r_t par r, où r désigne la valeur d'équilibre de long terme du taux d'intérêt réel. Dans une situation de sur-accumulation ($r < n$), cette relation montre qu'un accroissement de la dette publique ($\Delta b > 0$) peut aller de concert avec une baisse des impôts ($\Delta v < 0$) et une hausse de la consommation publique ($\Delta g > 0$). Cette politique améliore donc le bien-être des agents à long terme. Mais la relation (41) qui décrit la contrainte budgétaire de l'Etat à court terme — c'est-à-dire pour un niveau de dette b_{t-1} hérité du passé donné — montre qu'une hausse de la dette publique à court terme ($\Delta b_t > 0$) n'est pas incompatible avec une hausse de la consommation publique ($\Delta g_t > 0$) et une baisse des impôts ($\Delta v_t < 0$). Ainsi, une hausse de la dette publique dans une situation de sur-accumulation du capital permettrait d'accroître le bien-être de toutes les générations. Il n'y a pas de dilemme entre le court terme et le long terme. Il n'en va plus de même si l'économie souffre de sous-accumulation du capital ($r < n$), ce qui, rappelons-le, correspond probablement à la situation de la plupart des pays industrialisés. Dans ce cas, une réduction des déficits ($\Delta b < 0$) s'avère bénéfique à long terme. La relation (43) indique, en effet, que $\Delta b < 0$ avec $r < n$ n'est pas contradictoire avec une baisse des impôts ($\Delta v < 0$) et une hausse de la consommation publique ($\Delta g > 0$). Mais ce résultat ne se vérifie plus à court terme. La relation (41) montre qu'une réduction du déficit ($\Delta b_t < 0$) pour un niveau de dette b_{t-1} donné, entraîne soit une hausse des impôts ($\Delta v_t > 0$), soit une baisse de la consommation publique ($\Delta g_t < 0$). En d'autres termes, dans une situation de sous-accumulation du capital la réduction des déficits est une politique efficace à long terme, mais elle impose des "sacrifices" à court terme, c'est-à-dire pendant une phase transitoire (pour plus de précisions, voir Artus, 1996, pp. 40-42).

5.2 Les systèmes de retraite

Dans le cadre du modèle à générations imbriquées que nous avons utilisé jusque-là, nous caractériserons un système de retraite par la connaissance des cotisations que les jeunes devront verser pendant leur vie active et par les pensions auxquelles ils auront droit au cours de leur retraite. Pour décrire le comportement des agents, nous considérons encore le modèle simple de la section 2 (sans altruisme) où le revenu d'un retraité se compose désormais de son épargne et de sa pension. En désignant respectivement par v_t et x_{t+1} la cotisation réelle d'un jeune de la génération t et la pension qu'il percevra pendant sa deuxième période de vie, les contraintes budgétaires d'un agent s'écrivent désormais, en termes réels :

$$c_t + s_t = w_t - v_t \tag{45}$$

$$d_{t+1} = (1 + r_{t+1})s_t + x_{t+1}$$

En éliminant l'épargne s_t entre ces deux dernières équations, on obtient l'expression de la contrainte budgétaire intertemporelle d'un agent né à la date t. Il vient ainsi :

$$c_t + \frac{d_{t+1}}{1 + r_{t+1}} = w_t - v_t + \frac{x_{t+1}}{1 + r_{t+1}} \tag{46}$$

La plupart des systèmes de retraites sont fondés sur la capitalisation ou la répartition. Dans un régime de capitalisation, des "caisses de retraite" collectent et investissent les cotisations des jeunes, puis leur reversent l'intégralité des produits de ces placements lorsqu'ils se retirent de la vie active. En revanche, dans un système par répartition, la totalité des cotisations des jeunes sont directement versées aux vieux de la génération précédente. Nous allons examiner successivement les propriétés de ces deux systèmes.

5.2.1 Capitalisation

En prélevant sur chaque individu né à la date t une cotisation v_t, les caisses de retraite lui assure une pension x_{t+1} égale à $(1 + r_{t+1})v_t$. Ainsi, le revenu actualisé apparaissant dans la contrainte budgétaire intertemporelle (46) se confond avec le salaire réel w_t. Le système de retraites par capitalisation n'induit donc aucun effet intergénérationnel dans le sens où les cotisations prélevées sur une génération particulière n'ont aucune influence sur le bien-être d'une autre génération. Le programme décrivant les décisions d'un agent né à la date t est donc le même que celui que nous avions étudié au § 2.1, en particulier la consommation optimale c_t de première période peut toujours s'écrire sous la forme $c(w_t, r_{t+1})$ et, d'après la contrainte budgétaire (45) associée à la première période de vie, l'épargne s_t accumulée par cet agent s'écrit :

$$s_t = w_t - c(w_t, r_{t+1}) - v_t$$

On reconnaît dans cette dernière expression la fonction d'épargne du § 2.3, soit $s(w_t, r_{t+1}) \equiv w_t - c(w_t, r_{t+1})$, caractérisant le comportement des agents lorsqu'il n'y a pas de système institutionnel de retraites. Cette fonction donne, en quelque sorte, la valeur de l'épargne "libre" d'un agent. Son épargne totale s_t se déduit de cette dernière en retranchant le volume exogène v_t des cotisations obligatoires. Nous pouvons donc écrire :

$$s_t = s\,(w_t, r_{t+1}) - v_t \tag{47}$$

Cette valeur de s_t correspond effectivement au volume de l'épargne individuelle si elle est positive, c'est-à-dire si $s(w_t, r_{t+1}) > v_t$. Admettons tout d'abord que cette inégalité soit vérifiée, la demande de titres (en volume) émanant des caisses de retraites s'élève à $N_t v_t$ et celle des agents individuels atteint $N_t s_t$. L'équilibre sur le marché des titres - qui exprime aussi l'égalité de l'épargne et de l'investissement - prend alors la forme suivante :

$$K_{t+1} = N_t s_t + N_t v_t = N_t s(w_t, r_{t+1})$$

On retrouve ainsi le même sentier d'accumulation du capital que celui décrit par le modèle de l'équilibre concurrentiel sans institution de retraite du § 2.3. En d'autres termes, le système de retraite par capitalisation n'a aucune influence sur le sentier d'accumulation du capital si $s_t > 0$. Lorsque cette inégalité est vérifiée, ce résultat provient du fait qu'un tel système ne modifie pas l'épargne globale des ménages qui est la seule variable déterminant le volume du capital. L'épargne individuelle diminue du montant de la cotisation v_t, mais l'épargne globale ne varie pas puisque les caisses de retraite transforment l'intégralité des cotisations prélevées $N_t v_t$ en demande de titres. Dès lors que le rendement des placements est le même pour les individus et pour les caisses de retraites, peu importe de savoir qui réalise effectivement les placements. Le système de retraite par capitalisation est alors neutre vis-à-vis du processus d'accumulation du capital.

Ce résultat n'est plus vrai si la valeur optimale de l'épargne individuelle s_t donnée par la relation (47) est négative. Le versement des cotisations étant obligatoire, chaque agent se trouve alors dans une situation d'épargne forcée où son épargne personnelle s_t est nulle, mais où l'Etat le contraint à épargner indirectement le montant v_t des cotisations. Dans ce cas, l'égalité de l'épargne et de l'investissement s'écrit simplement :

$$K_{t+1} = N_t v_t \iff (1+n)k_{t+1} = v_t \tag{48}$$

Cette dernière relation montre, on ne peut plus clairement, que le système de retraite par capitalisation influence alors le sentier d'accumulation du capital. La relation (48) permet aussi de caractériser simplement le niveau optimal des cotisations. On constate en effet que, du point de vue du planificateur, le choix de v_t est équivalent à celui de k_{t+1}. On retrouve donc exactement le problème de la croissance optimale étudié à la section 3. Si, à titre d'illustration, on se restreint à un état stationnaire où toutes les générations ont le même poids ($R = 0$), le niveau optimal $\hat{k}_0$ du capital par tête est celui de la règle d'or décrit par la relation (26) et la valeur optimale de la cotisation individuelle est donnée par $\hat{v} = (1 + n)\hat{k}_0$. Cela signifie aussi que l'équilibre concurrentiel aboutirait à une accumulation du capital égale à celle de la règle d'or si l'Etat fixait le montant de la cotisation individuelle à la valeur $\hat{v}$.

Ce résultat fournit donc, en apparence, une règle simple pour pallier les éventuelles inefficacités dynamiques liées au fonctionnement d'une économie de concurrence parfaite. En réalité, il faut se rappeler que ce résultat n'est vrai que si les agents se trouvent dans une situation d'épargne forcée, c'est-à-dire si $s(w_t, r_{t+1}) < v_t$. Or, à l'équilibre stationnaire d'une économie de concurrence parfaite, l'épargne individuelle est égale à $(1 + n)k^*$, où k^* désigne la valeur stationnaire du capital par tête. Dans la mesure où l'Etat fixe le niveau de la cotisation à $\hat{v}$, la condition d'épargne forcée se résume à $k^* < \hat{k}_0$. On retrouve ici l'inégalité caractérisant une situation de sous-accumulation du capital. Le système de retraite par capitalisation permettrait donc d'améliorer le fonctionnement de l'économie de concurrence parfaite lorsque celui-ci conduit à une sous-accumulation du capital. Pour cela, l'Etat doit fixer le niveau de la cotisation individuelle à la valeur $\hat{v}$. Les agents se trouvent alors dans une configuration d'épargne forcée qui pallie le manque d'épargne "libre" inhérent à l'équilibre de sous-accumulation. En revanche, ce système n'a pas d'effet sur les équilibres de sur-accumulation.

5.2.2 Répartition

Dans un régime de retraite fondé sur la répartition, les prélèvements $N_t v_t$ effectués sur les jeunes nés à la date t forment l'intégralité des pensions $N_{t-1} x_t$ versées aux vieux vivant à cette même date. Au cours d'une période, la pension de retraite x_t d'un inactif et la cotisation v_t d'un actif sont ainsi liées par l'égalité $x_t = (1+n)v_t$. En reportant cette dernière dans la contrainte budgétaire intertemporelle (46), on obtient alors :

$$c_t + \frac{d_{t+1}}{1 + r_{t+1}} = \zeta_t \equiv w_t - v_t + \frac{(1 + n)v_{t+1}}{1 + r_{t+1}} \tag{49}$$

En maximisant son utilité intertemporelle $U(c_t, d_{t+1})$, le jeune de la génération t choisira une consommation de première période de vie $c_t = c(\zeta_t, r_{t+1})$ où ζ_t désigne le revenu réel actualisé de cet individu défini par le côté droit de la relation (49). A l'aide de la fonction d'épargne $s(\zeta_t, r_{t+1}) \equiv \zeta_t - c(\zeta_t, r_{t+1})$, il est possible d'exprimer le volume s_t de l'épargne individuelle de la façon suivante :

$$s_t = w_t - c(\zeta_t, r_{t+1}) - v_t = s(\zeta_t, r_{t+1}) - \frac{(1 + n)v_{t+1}}{1 + r_{t+1}} \tag{50}$$

Dans un régime de répartition, les caisses de retraite n'interviennent pas sur le marché des titres puisqu'elles redistribuent immédiatement aux vieux les cotisations prélevées sur les jeunes. Lorsque s_t est positif, l'égalité de l'investissement et de l'épargne se résume donc à $K_{t+1} = N_t s_t$. Compte tenu de l'expression (50) de l'épargne individuelle, on aura :

$$(1 + n)k_{t+1} = s(\zeta_t, r_{t+1}) - \frac{(1 + n)v_{t+1}}{1 + r_{t+1}} \tag{51}$$

Si l'on admet que le secteur productif se compose d'un grand nombre de firmes identiques en situation de concurrence parfaite, nous avons vu au § 2.2 que le taux d'intérêt réel r_t et le salaire réel w_t sont des fonctions $r(k_t)$ et $w(k_t)$ de l'intensité capitalistique k_t. L'expression (49) de la contrainte budgétaire intertemporelle indique alors que le revenu actualisé ζ_t est une fonction de k_t, k_{t+1} et des paramètres v_t et v_{t+1}. Par conséquent, le côté droit de l'égalité (51) est une fonction de ces mêmes quantités et cette égalité décrit donc le processus d'accumulation du capital en fonction des instruments v_t et v_{t+1}. Considérons, pour simplifier, que les cotisations sont constantes au cours du temps, soit $v_t = v$ pour tout t, et plaçons-nous dans le cas où l'économie converge vers un équilibre stationnaire unique stable caractérisé par la valeur k du capital par tête. Compte-tenu des relations (49) et (51) k est défini par :

$$(1 + n)k = s\left[w(k) + \frac{n - r(k)}{1 + r(k)}v, r(k)\right] - \frac{1 + n}{1 + r(k)}v \tag{52}$$

Un façon simple d'aborder les propriétés du système de retraite par répartition consiste à se demander si l'Etat peut fixer un taux de cotisation

v de manière à ce que la valeur de l'intensité capitalistique $k(v)$ solution de l'équation (52) coïncide avec la valeur $\hat{k}_0$ donnée par la règle d'or (26). Dans l'affirmative, le taux d'intérêt réel serait égal au taux de croissance n de l'économie et la relation (52) montre que le niveau optimal de cotisation, soit $\hat{b}$, est donné par :

$$\hat{b} = s\left[w(\hat{k}_0), n\right] - (1+n)\hat{k}_0 \tag{53}$$

Pour que l'Etat puisse mettre en œuvre cette politique de retraites, il faut simplement que $\hat{b}$ soit positif. Nous allons montrer que ce sera effectivement le cas lorsque l'équilibre stationnaire de l'économie de concurrence parfaite sans institution de retraite décrite au § 2.3 correspond à une situation de sur-accumulation du capital. Pour fixer les idées, supposons que la fonction d'utilité des agents soit séparable et logarithmique - voir (10) -, et que la technologie soit décrite par la fonction de Cobb-Douglas (15). Les relations (11) et (16) impliquent alors que la fonction d'épargne s'écrit simplement $s(k) = (1-\alpha)k^{\alpha}/(2+\rho)$. Le paramètre α étant plus petit que l'unité, cette fonction est concave. L'équilibre stationnaire k^* de l'économie de concurrence parfaite sans institution de retraite est solution de l'équation $s(k) = (1+n)k$, il se trouve donc à l'intersection de la fonction d'épargne $s(k)$ et de la droite $(1+n)k$. Nous avons représenté cette situation sur la Figure 2.

< Figure 2 >

La relation (53) donnant la valeur de la cotisation optimale $\hat{b}$ montre alors que cette dernière sera positive si et seulement si $\hat{k}_0 < k^*$. Sur la Figure 2, la valeur de $\hat{b}$ est représentée par la longueur du segment AB. Il apparaît qu'un système de retraite par répartition permet d'améliorer le fonctionnement d'une économie de concurrence parfaite lorsque celui-ci se caractérise par une sur-accumulation du capital. Dans cette situation d'inefficacité dynamique, ce régime réduit le volume de l'épargne investie, ce qui résoud le problème de sur-accumulation du capital.

De cette étude comparée des systèmes de retraite, il ressort que le régime de la répartition est préférable à celui de la capitalisation lorsque le taux de croissance n de l'économie est supérieur au taux d'intérêt réel r (puisque $r < n$ caractérise une situation de sur-accumulation du capital). Il faut evidemment inverser le sens de cette conclusion si $r > n$. Ces résultats se comprennent aisément : lorsque, par exemple, n est supérieur à r, le volume des cotisations futures dépassera le rendement (intérêt et principal) obtenu en plaçant les cotisations présentes sur le marché financier. Le système de retraite par répartition "domine" alors celui fondé sur la capitalisation. Or, depuis près de quinze ans, une grande majorité de pays - dont la France - se trouve dans une situation de faible croissance et de taux d'intérêt réel élevés (voir le Tableau 1 du §3.2). Les développements de cette section suggèrent alors que le système de retraite par répartition n'est pas le plus adapté à cette configuration.

6 Conclusion

Comparés aux modèles de la macroéconomie traditionnelle, le modèle à générations imbriquées présente l'avantage de se fonder sur des comportements explicites de maximisation intertemporelle de la part de tous les agents. Il permet ainsi de traiter de manière cohérente toutes les questions où les anticipations et la dynamique de l'économie revêtent une importance particulière. Par exemple, le problème de la dette est traité en tenant compte d'une contrainte budgétaire intertemporelle assurant la solvabilité à long terme de l'Etat. On prolonge parfois les modèles habituels de la macroéconomie en y insérant un consommateur représentatif ayant une durée de vie infinie. Cette approche présente l'inconvénient, entre autres, de ne pas permettre l'étude des liens financiers entre les générations (altruisme, systèmes de retraite par exemple) et surtout de masquer l'inefficacité des équilibres de marché liée précisément à la myopie des agents qui n'ont pas le même horizon que l'Etat. Ayant un horizon plus court que celui de l'Etat leurs décisions en matière de consommation, d'épargne et de transferts envers leurs descendants, ne correspondront pas à un maximum du bien être social. Dans ce cadre, il y a donc naturellement place pour une étude précise des effets des politiques économiques. Dans ce chapitre, nous avons principalement examiné les effets des politiques de gestion de la dette publique et des systèmes de retraite. En réalité l'usage des modèles à générations imbriquées permet d'appréhender bien d'autres motifs d'inefficience dynamique, ainsi les problèmes posés par les dépenses d'éducation et l'accumulation de capital humain ont été particulièrement étudiés.

7 Résumé

² Dans un modèle à générations imbriquées, l'équilibre général de concurrence parfaite n'est pas nécessairement un optimum de Pareto. Les di¤érences entre l'état optimal du plani…cateur et l'équilibre décentralisé de concurrence parfaite proviennent de l'allocation des ressources entre les générations et non de l'allocation des ressources au sein d'une même génération.

² La régle d'or correspond à un état stationnaire optimal où toutes les générations ont le même poids. Elle décrit aussi un sentier de croissance équilibrée où la consommation agrégée serait maximum. Il y a sur-accumulation (resp. sous-accumulation) du capital lorsque le niveau d'équilibre stationnaire du stock de capital par tête est supérieur (resp. inférieur) à celui qui est requis par la règle d'or. Un équilibre de sur-accumulation est dynamiquement ine¢cace dans la mesure où il serait possible, en partant de l'allocation des ressources qui lui est associée, d'augmenter le bien-être de toutes les générations successives.

² La prise en compte de l'altruisme dans le comportement des agents ne modi…e que partiellement les conclusions obtenues en s'abstenant de faire cette hypothèse. En particulier, l'altruisme de permet pas de sortir d'une situation caractérisée par une sur-accumulation du capital.

² Une hausse de la dette publique accroît le bien-être de toutes les générations lorsque l'équilibre général de l'économie de concurrence parfaite est dynamiquement ine¢cace. Elle permet de diminuer le stock de capital et d'accroître le bien-être de toutes les générations. En revanche, lorsque l'équilibre se caractérise par une sous-accumulation du capital - ce qui correspond vraisemblablement à la situation récente d'un grand nombre de pays industrialisés -, la baisse de la dette publique se traduit à long terme par une amélioration du sort de tous les agents. Mais la mise en œuvre de cette politique entraîne nécessairement une diminution du bien-être d'au moins une génération.

² Dans un système de retraite par capitalisation, les caisses de retraite collectent et investissent les cotisations des jeunes, puis leur reversent l'intégralité des produits de ces placements lorsqu'ils se retirent de la vie active. Dans un système par répartition, la totalité des cotisations

des jeunes sont directement versées aux vieux de la génération précédente. En plaçant les agents dans une situation d'épargne forcée, le système fondé sur la capitalisation permet d'améliorer le fonctionnement de l'économie de concurrence parfaite lorsque celui-ci conduit à sous-accumuler du capital. Cette conclusion s'inverse lorsque l'économie souffre de sur-accumulation, dans ce cas le système de retraite par répartition réduit le volume de l'épargne investie et permet de diminuer in fine le stock de capital.

8 Mots clefs

générations imbriquées, équilibre concurrentiel, efficacité, croissance optimale, allocation des ressources, épargne, accumulation, taux d'intérêt, règle d'or, altruisme, dette publique, systèmes de retraite.

9 Questions

Questions ponctuelles

- Qu'est-ce-que la règle d'or ?
- Qu'est-ce-qu'un équilibre de sous-accumulation ? de sur-accumulation ?
- Un équilibre de sous-accumulation est-il dynamiquement inefficace ?
- L'Etat peut-il réduire le déficit des finances publiques en restant perpétuellement endetté ?
- Qu'est-ce-qu'un régime de retraite par répartition ? par accumulation ?

Questions synthétiques

- Equilibre de marché de concurrence parfaite et optimum de Pareto dans le modèle à générations imbriquées.

- Quelles sont les conséquences économiques de l'altruisme entre les générations ?
- Comment l'Etat doit-il gérer la dette publique dans une situation durable de forte croissance et de taux d'intérêt réels peu élevés ?
- Comment l'Etat doit-il adapter les systèmes de retraite dans une situation durable de faible croissance et de taux d'intérêt réels élevés ?

10 Exercices

Exercice I

Calculez les solutions optimales du programme décrivant les choix de consommation et d'épargne d'un jeune né à la date t lorsque la fonction d'utilité prend la forme :

$$U(c_t, d_{t+1}) = v(c_t) + \frac{1}{1+\rho} v(d_{t+1}) \quad \text{avec} \quad v(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

Comment varie l'épargne en fonction du taux d'intérêt ? Interpréter les résultats en terme d'effet de substitution et d'effet de revenu.

[

$$c_t = \frac{1 + r_{t+1}}{1 + r_{t+1} + \left(\frac{1+r_{t+1}}{1+\rho}\right)^{1/\sigma}}, \; s_t = w_t - c_t$$

Les variations de l'épargne dépendent de la place de σ par rapport à 1.]

Exercice II : Monnaie et croissance

Dans le modèle à générations imbriquées du § 2.1, on suppose désormais que les jeunes doivent détenir de la monnaie pour réaliser leurs transactions. Cette détention de monnaie se traduit par une contrainte de liquidité $M_t \geq \lambda P_t c_t$ où M_t désigne la quantité de monnaie détenue par un jeune né à la date t. Le paramètre λ est un coefficient positif exogène. On pose $m_t \equiv M_t/P_t$ et l'on note π_{t+1} le taux d'inflation entre les dates t et $t+1$, soit $(1+\pi_{t+1}) \equiv P_{t+1}/P_t$. Contrairement à l'épargne réalisée sous forme de titres, on suppose que la détention de monnaie ne rapporte pas d'intérêt.

1) En admettant que la richesse d'un individu se compose de son seul salaire, écrivez ses contraintes budgétaires à chaque période de sa vie et montrez que la contrainte budgétaire intertemporelle prend la forme suivante :

$$\frac{1 + (1 + \lambda)i_{t+1}}{1 + i_{t+1}} c_t + \frac{d_t}{1 + r_{t+1}} = w_t$$

Où i_{t+1} désigne le taux d'intérêt nominal défini par :

$$1 + i_{t+1} \equiv (1 + r_{t+1})(1 + \pi_{t+1})$$

2) Calculez la consommation et l'épargne d'un agent en supposant que sa fonction d'utilité prend la forme logarithmique et séparable donnée par la relation (10) du § 2.1.

3) Le secteur productif est décrit par une fonction Cobb-Douglas du type (15) et l'on suppose que l'offre de monnaie croît au taux exogène μ. Montrez qu'à l'équilibre stationnaire l'intensité capitalistique k et le taux d'intérêt nominal i sont donnés par les deux équations suivantes :

$$(1 + n)k^{1-\alpha} = (1 - \alpha)\left[1 - \frac{1 + \rho}{2 + \rho}\frac{(1 + \lambda)(1 + i)}{1 + i(1 + \lambda)}\right]$$

$$1 + i = (1 + \mu)(1 + \alpha k^{\alpha-1} - \delta)$$

4) Comment varie l'équilibre stationnaire en fonction de μ et λ ? Interprétez.

[1) En termes nominaux, les contraintes budgétaires de première et de deuxième période s'écrivent respectivement :

$$P_t c_t + P_t s_t + M_t = P_t w_t$$

$$P_{t+1} d_{t+1} = (1 + i_{t+1})P_t s_t + M_t$$

Les agents n'ayant aucun avantage à détenir de la monnaie, on aura toujours $M_t = \lambda P_t c_t$. On procède alors comme au § 2.1 et on trouve la contrainte budgétaire intertemporelle.

2)

$$c_t = \frac{1 + \rho}{2 + \rho}\frac{1 + i_{t+1}}{1 + (1 + \lambda)i_{t+1}} w_t$$

$$s_t = w_t - (1+\lambda)c_t = \left[1 - \frac{1+\rho}{2+\rho}\frac{1+i_{t+1}}{1+(1+\lambda)i_{t+1}}\right] w_t \qquad (54)$$

3) A l'équilibre stationnaire on a $M_t = \lambda P_t c \Rightarrow \mu = \pi$. On a aussi $(1+n)k = s$ et $w = (1-\alpha)k^{\alpha}$. En substituant ces deux égalités dans (54) on aboutit à l'équation définissant k. Comme on a aussi $r = \alpha k^{\alpha-1} - \delta$, et $(1+i) = (1+r)(1+\pi)$ avec $\mu = \pi$ on trouve l'équation du texte.]

Exercice III :Croissance endogène dans un modèle à générations imbriquées

On utilise encore le modèle de base décrit à la section 2 en supposant que les agents ont une fonction d'utilité séparable et logarithmique de la forme (10). En revanche, on admet pour simplifier que la population active est une constante L (donc $n = 0$). Le secteur productif se compose d'un grand nombre d'entreprises J dont les fonctions de production s'écrivent :

$$Y_{jt} = A_t K_{jt}^{\alpha} L_{jt}^{1-\alpha} \qquad j = 1, ..., J$$

Où Y_{jt}, K_{jt} et L_{jt} désignent respectivement la production de l'entreprise j à la date t, son stock de capital et son niveau d'emploi. Le paramètre A_t est commun à toutes les firmes et représente la productivité globale des facteurs à la date t. On suppose qu'il est lié au stock de capital global K_{t-1} en place à la date $(t-1)$ par la formule :

$$A_t = AK_{t-1}^{\beta} \quad ; \quad A > 0, \;\; \beta > 0$$

1) Commenter cette description du secteur productif et écriver la fonction de production globale. Quelle est l'échelle de ses rendements ?

2) En supposant que chaque firme considère A_t comme une donnée, montrer que l'évolution de l'intensité capitalistique $k_t \equiv K_t/L$ dans une économie de concurrence parfaite est donnée par l'équation de récurrence :

$$k_{t+1} = \frac{(1-\alpha)A_t}{2+\rho} k_t^{\alpha}$$

En déduire que l'on a :

$$K_{t+1} = aK_t^{\alpha}K_{t-1}^{\beta}$$

Où a est un coefficient que l'on précisera.

3) Montrer que la condition $\alpha + \beta = 1$ est nécessaire pour avoir une croissance équilibrée à un taux g^* constant. Donner la valeur de g^*.

4) Ecriver le programme du planificateur et montrer qu'un état optimal de croissance régulière où toutes les générations ont le même poids est caractérisé par un taux de croissance $\hat{g} > g^*$.

[1) A l'équilibre $L_{jt} = L_t/J, K_{jt} = K_t/J$ et $Y_{jt} = Y_t/J.$ Donc $Y_{jt}/J = AK_{t-1}^{\beta}(K_t/J)^{\alpha}(L_t/L)^{1-\alpha}$ et la fonction de production globale s'écrit :

$$Y_t = AK_{t-1}^{\beta}K_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha}$$

L'échelle des rendements est égal à $\alpha + \beta.$

2) On reprend le modèle du § 2.3 avec $n = 0$. En introduisant le coefficient A_t on trouve immédiatement la formule de la question. Avec $k_t = K_t/L$ on a alors :

$$\frac{K_{t+1}}{L} = \frac{1-\alpha}{2+\rho}AK_{t-1}^{\beta}\left(\frac{K_t}{L}\right)^{\alpha} \Rightarrow K_{t+1} = \left[\frac{(1-\alpha)AL^{1-\alpha}}{2+\rho}\right]K_t^{\alpha}K_{t-1}^{\beta-1}$$

3) Si $K_{t+1} = (1 + g^*)K_t$ pour tout $t,$ la formule précédente donne :

$$1 = a(1+g^*)^{\alpha-2}K_{t-1}^{\alpha+\beta-1}$$

Il faut donc $\alpha + \beta = 1$ pour que le modèle ne soit pas dégénéré, dans ce cas

$$g^* = a^{\frac{1}{2-\alpha}} - 1$$

4) Il suffit de reprendre le modèle du § 3.1 avec $R = 0$ et d'introduire le coefficient A_t dans la fonction de production.]

11 Références

Allais, M. (1947), Economie et intérêt, Imprimerie nationale, Paris. [Pour l'histoire, le premier modèle à générations imbriquées].

Artus, P. (1995), Macroéconomie, Economica, Coll. Economie Poche, Paris. [Un ouvrage où il est montré qu'un grand nombre de questions de la macroéconomie traditionnelle reçoivent des réponses sensiblement di¤érentes à l'aide des modèles à générations imbriquées].

Artus, P. (1996), Dé…cits publics, Economica, Coll. Economie Poche, Paris. [Idem au précédent]

Azariadis, C. (1993), Intertemporal macroeconomis, Blackwell, Cambrige, Mass. [Niveau assez di¢cile, à consulter surtout pour les problèmes de stabilité et de dynamique].

Barro, R. (1974), "Are governments bonds net wealth ?", Journal of Political Economy, 82, pp. 1095-1117.

Barro, R. et Sala-i-Martin, X. (1995), Economic growth, McGraw-Hill. [Il y a quelques exemples de modèle de croissance exogène et endogène traités à l'aide des modèles à générations imbriquées].

Bernheim, B. et Bagwell, K. (1988), "Is everything neutral ?", Journal of Political Economy, 96, pp. 308-338.

Blanchard, O. et Fischer, S. (1989), Lectures on macroeconomics, MIT Press, Cambrige, Mass. [Un livre qui permet de bien comprendre les différences et les similitudes entre les approches traditionnelles de la macroéconomie, le modèle avec consommateur représentatif et horizon in…ni, et les générations imbriquées].

Diamond, P. (1965), "National debt in a neo-classical model", American Economic Review, 55, pp. 1126-1150.

Grandmont, J.-M. (1983), Money and value, Econometric Society Series, Cambridge University Press.

Grandmont, J.-M. (1985), "On endogenous competitive business cycles", Econometrica, 53(5), pp. 995-1045. [Article di¢cile montrant comment le modèle à générations imbriquées a permis de renouveller en profondeur l'étude des cycles].

Michel, P. (1993), "Le modèle à générations imbriquées, un instrument d'analyse macroéconomique", Revue d'Economie Politique, 103(2), pp. 191-220. [Excellent survey en français sur les liens entre l'ine¢cience dynamique et certaines questions de politique économique].

Picard, P. (1992), Eléments de microéconomie, Montchrestien, Paris.

Samuelson, P. (1958), "An exact consumption-loan model of interest with or without the social contrivance of money", Journal of Political Economy, 66, pp. 467-482. [Un article historique].

Varian, H. (1992), Microeconomic analysis, 3ème ed., Norton & Company, New York.