1 Correction des deux exemples proposés en cours.

Lisez!, refaites sans paniquer, c'est accéssible pour vous j'en suis certain! et n' hésitez aucune seconde à me demander d' y revenir la semaine prochaine si vous avez des difficultés à suivre la demonstration, je l'ai écrite rapidement!

2 Exemple.2

$$X_t = U\cos(wt + V) \tag{1}$$

Hypothèses: $E(U) = 0$, $Var(U) = \sigma^2$, V uniforme sur $[-\pi, \pi]$. U et V indépendantes.

2.1 Stationnarité en moyenne

*Par définition

$$E(X_t) = E[U\cos(wt + V)] \tag{2}$$

*U et V independantes $\Longrightarrow$ on peut écrire (2) sous la forme:

$$E(X_t) = E[U] * E[\cos(wt + V)] \tag{3}$$

OR $E[U] = 0$ par hypothèse, donc (3)$\Longrightarrow$ $E(X_t) = 0$ d'où stationnarité en moyenne. ($E[\cos(wt + V)]$ est fini, ne tend pas vers l' infini).

2.2 Stationnarité en variance.

Comme $E(X_t) = 0$ alors $Var(U) = \sigma^2$ est donnée par:

$$\begin{aligned} Var(X_t) &= E(X_t^2) = E[U^2\cos^2(wt + V)] && (4) \\ &= E[U^2] * E[\cos^2(wt + V)] && (5) \\ &= \sigma^2 E[\cos^2(wt + V)] && (6) \end{aligned}$$

Il reste à calculer $E[\cos^2(wt + V)]$.
On va utiliser la formule $cos(a + b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$.
En posant $a = wt$ et $b = V$, on a:

$$\begin{aligned} E[\cos^2(wt + V)] &= E[[\cos(wt)\cos(V) - \sin(wt)\sin(V)]^2] \\ &= E[\cos^2(wt)\cos^2(V)] + E[\sin^2(wt)\sin^2(V)] \\ &\quad -2E[\cos(wt)\cos(V)\sin(wt)\sin(V)] \\ &= \\ &\quad \cos^2(wt)E[\cos^2(V)] + \sin^2(wt)E[\sin^2(V)] \\ &\quad -2 * \cos(wt) * \sin(wt)E[\sin(V)\cos(V)] \end{aligned}$$

*Tout le problème revient à calculer $E[\cos^2(V)]$, $E[\cos^2(V)]$, $E[\sin(V)\cos(V)]$.

*Il suffit de remarquer que: $\cos^2(V) = \frac{1}{2}[1+\cos(2V)]$, $\sin^2(V) = \frac{1}{2}[1-\cos(2V)]$ et $\sin(V)\cos(V) = \frac{1}{2}\sin(2V)$, d' où:

*$E[\cos^2(V)] = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(V)\frac{1}{2\pi}dV = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}[1+\cos(2V)]\frac{1}{2\pi}dV =$
$= \frac{1}{4\pi}[V + \frac{1}{2}\sin(2V)]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}$

*$E[\sin^2(V)] = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(V)\frac{1}{2\pi}dV = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}[1-\cos(2V)]\frac{1}{2\pi}dV$
$= \frac{1}{4\pi}[V - \frac{1}{2}\sin(2V)]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}$

*$E[\sin(V)\cos(V)] = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(V)\cos(V)\frac{1}{2\pi}dV$
$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}[-\sin(2V)]\frac{1}{2\pi}dV = \frac{1}{4\pi}[\frac{1}{2}\cos(2V)]_{-\pi}^{\pi} = 0$

D'où:

$$\begin{aligned} Var(X_t) &= \frac{\sigma^2}{2}[\cos^2(wt) + \sin^2(wt)] \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \end{aligned} \tag{9}$$

2.3 Stationnarité faible

* $Cov(X_t, X_{t+h}) = E[(X_t - E(X_t))(X_{t+h} - E(X_{t+h}))]$
* Or $E(X_t) = 0$
* donc $Cov(X_t, X_{t+h}) = E[(X_t X_{t+h}]$
$= E\{[U\cos(wt+V)][U\cos(w(t+h)+V)]\}$
$= E\{[U^2] * E\{[\cos(wt+V)][\cos(w(t+h)+V)]\}$
$= \sigma^2 E\{[\cos(wt+V)][\cos(w(t+h)+V)]\}$ car U et V sont independantes.
*Or $cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
* En posant $a = wt + V$ et $b = w(t+h) + V$ on obtient:
*$Cov(X_t, X_{t+h}) = \frac{\sigma^2}{2}E\{\cos(w(2t+h)+2V) + \cos(-wh)\}$
$= \frac{\sigma^2}{2}\{E\{\cos(w(2t+h)+2V)\}\} + \frac{\sigma^2}{2}\cos(-wh)$
*Il reste à calculer $E\{\cos(w(2t+h)+2V)\}$:
*Or $\cos(w(2t+h)+2V) = \cos(w(2t+h))\cos(2V) - \sin(w(2t+h))\sin(2V)$
*Donc $E\{\cos(w(2t+h)+2V)\} =$
$E\{\cos(w(2t+h))\cos(2V)\} - E\{\sin(w(2t+h))\sin(2V)\}$
$= \cos(w(2t+h))E(\cos(2V)) - \sin(w(2t+h)E(\sin(2V)$
*or $E(\cos(2V)) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2V)\frac{1}{2\pi}dV = 0$, et

$E(\sin(2V)) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2V)\frac{1}{2\pi}dV = 0,$

*D' où $E\{\cos(w(2t+h)+2V)\} = 0$ et en remontant dans les calculs, on obtient:

$$cov(X_t, X_{t+h}) = \frac{\sigma^2}{2}\cos(-wh) = \frac{\sigma^2}{2}\cos(wh) \tag{10}$$

Ainsi la fonction de covariance ne dépend que de h et non de t, X_t est donc faiblement stationnaire.

2.4 Remarques:

Pour $h = 0$, on obtient $cov(X_t, X_t) = E(X_t^2) = \frac{\sigma^2}{2}\cos(-w0) = \frac{\sigma^2}{2}$ d' après(10). On obtient le même résultat que dans (9).

De manière plus générale dans les exercices, commencez par la moyenne, puis prouvez la stationnarité de la covariance qui implique en posant $h = 0$ une variance constante(stationnarité de la variance).

2.5 Exemple.3

2.6

$$X_t = e_t - ae_{t-1} \tag{11}$$

Hypothèse le processus $\{e_t\}$ idépendant et identiquement distribué avec $E(e_t) = 0$ et $Var(e_t) = \sigma^2$.

*$E(X_t) = E(e_t - ae_{t-1}) = E(e_t) - aE(e_{t-1}) = 0 \Longrightarrow$ stationnarité en moyenne

*$Cov(X_t, X_{t+h}) = E[(e_t - ae_{t-1})(e_{t+h} - ae_{t+h-1})]$

*$Cov(X_t, X_{t+h}) =$

$E[e_te_{t+h}] - aE[e_te_{t+h-1}] - aE[e_{t-1}e_{t+h}] + a^2E[e_{t-1}e_{t+h-1}]$ (aa)

*Il faut discuter à ce stade en fonction des valeurs prises par h:

*si $h = 0$, $Cov(X_t, X_t) = E(X_t^2)$ c' est à dire par définition la variance. car $E(X_t) = 0$.

*La formule(aa) donne pour $h = 0$: $var(X_t) = E[e_te_t] - aE[e_te_{t-1}] - aE[e_{t-1}e_t] + a^2E[e_{t-1}e_{t-1}]$

*Or $E[e_te_{t-1}] = 0$ car les variables sont indépendantes, d' où:

* $var(X_t) = E[e_te_t] + a^2E[e_{t-1}e_{t-1}] = \sigma^2[1 + a]$

*si $h = 1$ alors la formule (aa) donne:

* $Cov(X_t, X_{t+1}) = E[e_te_{t+1}] - aE[e_te_t] - aE[e_{t-1}e_{t+1}] + a^2E[e_{t-1}e_t]$

$= -a\sigma^2$ car $E[e_te_{t+1}] = E[e_{t-1}e_t] = 0$ car les variables sont indépendantes.

*si $h = 2$, la formule(aa) donne:

$Cov(X_t, X_{t+2}) = E[e_te_{t+2}] - aE[e_te_{t+1}] - aE[e_{t-1}e_{t+2}] + a^2E[e_{t-1}e_{t+1}] = 0$

*si $h \geqslant 3$, $Cov(X_t, X_{t+2}) = 0$

* En résumé:

$$Cov(X_t, X_{t+h}) = \begin{cases} = \sigma^2[1+a] & si \quad h = 0 \\ = -a\sigma^2 & si \quad h = 1 \\ 0 & si \quad h \geq 2 \end{cases}$$

Ainsi $Cov(X_t, X_{t+h})$ est indépendante de t mais plutôt de h. Le processus est stationnaire faiblement.